Álgebra II

Grado en Matemáticas

Colección manuales uex - 00

00

ÁLGEBRA II

GRADO EN MATEMÁTICAS

MANUALES UEX

PEDRO SANCHO DE SALAS

ÁLGEBRA II

GRADO EN MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

2025

Edita

Universidad de Extremadura. Servicio de Publicaciones
C./ Caldereros, 2 - Planta 2ª - 10071 Cáceres (España)
Telf. 927 257 041 - Fax 927 257 046
publicac@unex.es
www.unex.es/ publicaciones

ISSN XXX
ISBN de méritos XXX

Índice general

Introducción

Simplificando y hablando de un modo algo pedante podríamos decir que el Álgebra es la ciencia que estudia los polinomios y sus raíces. En términos matemáticos algo más amplios, el Álgebra estudia los sistemas de ecuaciones algebraicas

$$\begin{array}{l} p_1(x_1,\ldots,x_n)=0 \\ \ldots \\ p_r(x_1,\ldots,x_n)=0 \end{array} \qquad (*)$$

y sus soluciones.[1]

Profundicemos en lo que entendemos generalmente por sistemas de ecuaciones algebraicas. Tendemos a identificar los sistemas de ecuaciones con el conjunto de sus soluciones. Así, por ejemplo, si al sistema de ecuaciones anterior le añadimos la ecuación $p_1(x_1,\ldots,x_n)=0$ decimos que tenemos el mismo sistema, o si le añadimos una ecuación que sea combinación $k[x_1,\ldots,x_n]$-lineal de $p_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,p_r(x_1,\ldots,x_n)$ decimos que tenemos el mismo sistema de ecuaciones algebraicas, porque las soluciones de ambos sistemas son las mismas. En conclusión, cuando consideramos el sistema de ecuaciones $(*)$ estamos considerando el ideal $(p_1,\ldots,p_r)\subset k[x_1,\ldots,x_n]$. Digamos por definición, que dar un sistema de ecuaciones algebraicas es dar un ideal del anillo de polinomios.

¿Las soluciones de un sistema de ecuaciones algebraicas determinan el sistema, es decir, el ideal? Las soluciones reales del sistema

$$x^2+y^2+1=0$$

son el vacío, del cual, obviamente, no podríamos deducir que estábamos planteando la ecuación $x^2+y^2+1=0$. Ahora bien, si consideramos el conjunto de todas las soluciones

[1] Quisiera hacer aquí un comentario marginal: En nuestra definición de Álgebra aparecen conceptos como “espacio de soluciones” (de un sistema de ecuaciones algebraicas) “funciones algebraicas” (los polinomios). En Álgebra Lineal aparecen los conceptos de espacio vectorial y las aplicaciones lineales. En Topología aparecen los conceptos de espacio topológico y las funciones continuas. En Geometría Diferencial aparecen las variedades diferenciales y las aplicaciones diferenciales.

complejas de este sistema, se cumple que el ideal de todos los polinomios de $\mathbb{C}[x,y]$ que se anulan en este conjunto coincide con el ideal (x^2+y^2+1). El teorema de los ceros de Hilbert dice que las soluciones de un sistema "casi" determinan el sistema. Expliquemos el porqué del "casi" de la sentencia anterior. Veamos el pequeño problema con el que nos encontramos. Los dos sistemas de ecuaciones distintos $x=0$ y $x^2=0$ ($(x^2) \underset{\neq}{\subset} (x)$) tienen las mismas soluciones. En general, dado un ideal $I \subset \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ y $f \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ tal que $f^m \in I$, las soluciones del sistema de ecuaciones algebraicas definido por I son las mismas que el definido por (I,f). El teorema de los ceros de Hilbert dice que (el ideal de) las funciones que se anulan sobre el conjunto de las soluciones de un sistema de ecuaciones algebraicas $I \subseteq \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$, coincide con $r(I) = \{f \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ tales que $f^m \in I$, para algún $m>0\}$.

En el estudio de los sistemas de ecuaciones algebraicas hemos ampliado nuestro cuerpo de partida $\mathbb{R}$ a uno algebraicamente cerrado, $\mathbb{C}$. Si ampliamos aún más nuestro "marco" es decir, consideramos en vez de $\mathbb{C}$ cualquier anillo, se cumple que "las soluciones (sobre cualquier anillo) de un sistema de ecuaciones algebraicas I determinan el ideal I". Así por ejemplo, $x=0$ no tiene las mismas soluciones que $x^2=0$: sea $A=\mathbb{C}[z]/z^2$, entonces $\bar{z}$ es una solución de $x^2=0$ y no es una solución de $x=0$.

Sea $I \subseteq \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ un sistema de ecuaciones algebraicas. Consideremos (para cada anillo) el conjunto de soluciones de este sistema de ecuaciones algebraicas. Consideremos una función de este conjunto, es decir, una aplicación (para cada anillo A)

$$\{\text{Conjunto de soluciones sobre } A \text{ del sistema } I\} \xrightarrow{\phi_A} A$$

Existe un único $\overline{p(x_1,\dots,x_n)} \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/I$ de modo que $\phi_A((a_1,\dots,a_n)) = p(a_1,\dots,a_n)$. Es decir, "el anillo de todas las funciones del conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones algebraicas definido por I es $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/I$".

Dados dos sistemas de ecuaciones algebraicas $I \subseteq k[x_1,\dots,x_n]$, $J \subseteq k[y_1,\dots,y_m]$ y una aplicación (para cada anillo A)

$$\{\text{Sol. con valores en } A \text{ del sistema } I\} \xrightarrow{\varphi_A} \{\text{Sol. con valores en } A \text{ del sistema } J\}$$

existe un único morfismo de k-álgebras $f\colon k[y_1,\dots,y_m]/J \to k[x_1,\dots,x_m]/I$ (de ecuaciones $\bar{y}_i = \overline{f_i(x_1,\dots,x_n)}$, es decir, $f(\bar{y}_i) = \overline{f_i(x_1,\dots,x_n)}$) de modo que

$$\varphi_A(a_1,\dots,a_n) = (f_1(a_1,\dots,a_n),\dots,f_m(a_1,\dots,a_n)).$$

La teoría (Geometría) que estudia los conjuntos de soluciones (sobre todo anillo) de un sistema de ecuaciones algebraicas y sus aplicaciones coincide con la teoría (Álgebra) que estudia las k-álgebras y sus morfismos de k-álgebras.

En la literatura matemática es más frecuente hablar del espectro primo del anillo $k[x_1,\dots,x_n]/I$ (es decir, $\operatorname{Spec} k[x_1,\dots,x_n]/I$, que es el conjunto de los ideales primos de $k[x_1,\dots,x_n]/I$) que considerar el funtor ϕ_A que asocia a cada anillo A las soluciones del sistema de ecuaciones algebraicas definido por I. Si $k \hookrightarrow K$ es una extensión de cuerpos, $(a_1,\dots,a_n)$ es una solución sobre K del sistema de ecuaciones definido por I y $\tau\colon K \simeq K$ es un isomorfismo de cuerpos sobre k, es fácil probar que $(\tau(a_1),\dots,\tau(a_n))$ es también una solución del sistema de ecuaciones. A cada solución $\alpha = (a_1,\dots,a_n) \in K^n$ del sistema de ecuaciones le podemos asignar el ideal primo $\mathfrak{p}_\alpha := \{\overline{p(x_1,\dots,x_n)} \in k[x_1,\dots,x_n]/I$ tales que $p(a_1,\dots,a_n) = 0\}$ y es fácil comprobar que a $(a_1,\dots,a_n)$ y $(\tau(a_1),\dots,\tau(a_n))$ les asignamos el mismo ideal primo. Se puede probar que si K es un cuerpo algebraicamente cerrado "suficientemente grande" (por ejemplo si $k = \mathbb{Q}$ podemos tomar $K = \mathbb{C}$), entonce el conjunto de soluciones sobre K del sistema de ecuaciones definido por I, módulo automorfismos de K, es igual a $\operatorname{Spec} k[x_1,\dots,x_n]/I$.

Capítulo 1

Anillos noetherianos

1.1. Introducción

En Geometría Algebraica, los espacios estudiados son objetos definidos por un número finito de ecuaciones (la finitud es una condición natural). Es decir, los ideales que se consideran son los generados por un número finito de funciones. Los anillos cuyos ideales son finito generados se denominan noetherianos. Como veremos los anillos que usualmente aparecen en Geometría Algebraica y la Aritmética son noetherianos, de forma que estos anillos proporcionan el marco natural para desarrollar su estudio.

Las operaciones básicas como producto tensorial, cocientes etc., se realizan de un modo mucho más flexible y claro con los módulos que con los ideales, y muchos de los objetos usuales en Matemáticas tienen estructura de módulo. Será natural comenzar estudiando los módulos finito generados, cuyos submódulos sean finito generados, en vez de limitarnos simplemente a los anillos cuyos ideales son finito generados.

1.2. Módulos noetherianos

1. Definición: Un A-módulo M se dice que es un A-módulo noetheriano si todo submódulo suyo (propio o no) es finito generado.

2. Definición: Un A-módulo M se dice que es noetheriano si toda cadena ascendente de submódulos de M

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_n \subseteq \cdots$$

estabiliza, es decir existe $r >> 0$ de modo que $M_r = M_{r+1} = \cdots$.

3. Proposición: *Las dos definiciones anteriores son equivalentes.*

Demostración. **def**$^1 \Rightarrow$ **def**^{2}: Dada una cadena ascendente de submódulos de M, $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_n \subseteq \cdots$, sea $M' = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} M_i \subseteq M$. Como M' es un submódulo de M, es finito generado. Escribamos $M' = \langle m_1, \ldots, m_r\rangle$, con $m_j \in M_{i_j}$. Si r es el máximo de todos los i_j, $M' = M_r$, luego $M_r = M_{r+1} = \cdots$.

def$^2 \Rightarrow$ **def**^{1}: Sea $M' \subseteq M$. Sea $m_1 \in M'$ y consideremos el submódulo de M, $M_1 = \langle m_1\rangle$. Si $M_1 \neq M'$, sea $m_2 \in M' \backslash M_1$. Consideremos el submódulo de M, $M_2 = \langle m_1, m_2\rangle$. Repitiendo el proceso, obtenemos una cadena de inclusiones estrictas

$$\langle m_1\rangle \subset \langle m_1, m_2\rangle \subset \cdots$$

que ha de ser finita, porque por la segunda definición toda cadena estabiliza. Por tanto, existe un $r \in \mathbb{N}$ tal que $\langle m_1, \ldots, m_r\rangle = M'$.

□

4. Ejemplo: Los k-espacios vectoriales de dimensión finita son k-módulos noetherianos.

5. Teorema: *Sea M un A-módulo y $N \subset M$ un submódulo. M es un A-módulo noetheriano si y solo si N y M/N son módulos noetherianos.*

Demostración. Sea $\pi\colon M \to M/N$, $\pi(m) := \bar{m}$ el morfismo de paso al cociente.

$\Rightarrow$) Evidentemente N es noetheriano. Dado un submódulo $\bar{M} \subset M/N$, tenemos que $\pi^{-1}(\bar{M}) = \langle m_1, \ldots, m_r\rangle$. Por tanto, $\bar{M} = \langle \pi(m_1), \ldots, \pi(m_r)\rangle$.

$\Leftarrow$) Sea $M' \subset M$ un submódulo. $M' \cap N$ es finito generado porque es un submódulo de N, y $M'/M' \cap N$ es finito generado porque podemos considerarlo como submódulo de M/N, vía el morfismo inyectivo $M'/M' \cap N \hookrightarrow M/N$, $\bar{m} \mapsto \bar{m}$. Escribamos $M' \cap N = \langle m_1, \ldots, m_r\rangle$ y $M'/M' \cap N = \langle \bar{m}_{r+1}, \ldots, \bar{m}_n\rangle$, entonces $M' = \langle m_1, \ldots, m_n\rangle$. En conclusión, M es un módulo noetheriano.

□

6. Ejercicio: Prueba que M y M' son módulos noetherianos si y solo si $M \oplus M'$ es noetheriano.

1.3. Anillos noetherianos

1. Definición: Se dice que un anillo A es noetheriano si como A-módulo es noetheriano, es decir si todo ideal es finito generado, o equivalentemente, si toda cadena ascendente de ideales estabiliza.

2. Ejemplo : Los cuerpos, los anillos de ideales principales, como $\mathbb{Z}$, $k[x]$, son noetherianos.

Un ejemplo de anillo no noetheriano, es el anillo de funciones diferenciales en la recta real: Sea I_n el ideal de las funciones que se anulan en $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que $I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n \subset \cdots$ es una cadena ascendente estricta de ideales en el anillo, luego no estabiliza. Por tanto, el anillo no es noetheriano.

3. Ejercicio : Da un ejemplo de módulo finito generado que no sea noetheriano.

4. Proposición : *Si A es un anillo noetheriano, todo A-módulo finito generado es noetheriano.*

Demostración. Si A es noetheriano, A^n es un A-módulo noetheriano, por el ejercicio 1.2.6. Ahora bien, como todo módulo finito generado es cociente de un libre finito generado, concluimos que los módulos finito generados son noetherianos.

□

Por tanto, sobre los dominios de ideales principales todo módulo finito generado es noetheriano.

5. Proposición : *Sea A un anillo noetheriano. Para todo A-módulo existe una presentación por A-módulos libres finito generados.*

Demostración. Sea $M = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$ un A-módulo finito generado. Consideremos el epimorfismo de A-módulos $A^r \to M$, $\pi(a_1, \dots, a_r) := a_1 m_1 + \cdots + a_r m_r$. $\operatorname{Ker}\pi$ es un submódulo de A^r, luego es finito generado. Escribamos, $\operatorname{Ker}\pi = \langle n_1, \dots, n_s \rangle$ y consideremos el epimorfismo $\pi' \colon A^s \to \operatorname{Ker}\pi$, $\pi'(a_1, \dots, a_s) := a_1 n_1 + \cdots + a_s n_s$. Sea $i \colon \operatorname{Ker}\pi \hookrightarrow A^r$ el morfismo de inclusión y $f := i \circ \pi'$ y consideremos los morfismos

$$\boxed{A^s \xrightarrow{f} A^r \xrightarrow{\pi} M}$$

Entonces, $\operatorname{Im} f = i(\pi'(A^s)) = \operatorname{Ker}\pi$ y $A^r / \operatorname{Im} f \simeq M$. Es decir, hemos construido una presentación por módulos libres finito generados de M.

□

1.4. k-álgebras de tipo finito

1. Teorema de la base de Hilbert : *Si A es un anillo noetheriano entonces $A[x]$ es un anillo noetheriano.*

Demostración. Sea $I \subset A[x]$ un ideal. Tenemos que ver que es finito generado:

Sea $J \subseteq A$ el conjunto formado por los coeficientes de máximo grado de los $p(x) \in I$. J es un ideal de A: Si $p(x) = a_0x^n + \cdots + a_n, q(x) = b_0x^m + \cdots + b_m \in I$, entonces $x^m p(x) + x^n q(x) = (a_0 + b_0)x^{n+m} + \cdots \in I$, luego si $a_0, b_0 \in J$ entonces $a_0 + b_0 \in J$.

Por ser A noetheriano, $J = (b_1, \dots, b_r)$ es finito generado. Así, existen $p_1, \dots, p_r \in I$ cuyos coeficientes de grado máximo son $b_1, \dots, b_r$, respectivamente. Además, multiplicando cada p_i por una potencia conveniente de x, podemos suponer que $\operatorname{gr} p_1 = \cdots = \operatorname{gr} p_r$. Escribamos $\operatorname{gr} p_i = m$, para todo i.

Queremos probar que

$$I = (p_1, \dots, p_r)_{A[x]} + I \cap \{A + Ax + \cdots + Ax^{m-1}\}.$$

Dado $q(x) \in I$, tenemos que probar que $q(x) \in (p_1, \dots, p_r)_{A[x]} + I \cap \{A + Ax + \cdots + Ax^{m-1}\}$. Procedemos por inducción sobre el grado de $q(x)$. Si $\operatorname{gr}(q(x)) \leq m$,entonces evidentemente $q(x) \in I \cap \{A + Ax + \cdots + Ax^{m-1}\} \subseteq (p_1, \dots, p_r)_{A[x]} + I \cap \{A + Ax + \cdots + Ax^{m-1}\}$. Si $\operatorname{gr}(q(x)) = n > m$, escribamos $q(x) = a_0x^n + \cdots + a_n$. Sean $\lambda_i \in A$ tales que $a_0 = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_r b_r$. Entonces. $q_1(x) := q(x) - \sum_i \lambda_i x^{n-m} p_i \in I$ y $\operatorname{gr}(q_1(x)) < \operatorname{gr} q(x)$. Por inducción, $q_1(x) \in (p_1, \dots, p_r)_{A[x]} + I \cap \{A + Ax + \cdots + Ax^{m-1}\}$, luego $q(x)$ también.

$I \cap \{A + Ax + \cdots + Ax^{m-1}\}$ es un A-módulo finito generado ya que es submódulo de $\{A + Ax + \cdots + Ax^{m-1}\}$, que es un A-módulo noetheriano. En conclusión, si escribimos $I \cap \{A + Ax + \cdots + Ax^{m-1}\} = \langle q_1, \dots, q_s \rangle_A$, tenemos que $I = (p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_s)$.

□

2. Definición: Dado un morfismo de anillos $f : A \to B$ se dice que B es una A-álgebra.

Con abuso de notación, al elemento $f(a)$ lo denotaremos muchas veces a. Observemos que si A es un cuerpo (y $B \neq 0$), entonces f es un morfismo inyectivo.

3. Ejemplo: Todo anillo A es de modo natural (y único) $\mathbb{Z}$-álgebra: $\mathbb{Z} \to A$, $n \mapsto n$, es el único morfismo de anillos de $\mathbb{Z}$ en A.

4. Ejemplo: $A[x_1, \dots, x_n]$ es una A-álgebra de modo natural: tenemos el morfismo de anillos $A \to A[x_1, \dots, x_n]$, $a \mapsto a$.

5. Ejemplo: $\mathbb{R}$ es de modo natural una $\mathbb{Q}$-álgebra. $\mathbb{C}$ es de modo natural una $\mathbb{R}$-álgebra.

6. Definición: Se dice que B es una A-álgebra de tipo finito si existen $\xi_1, \dots, \xi_r \in B$ que generen A-algebraicamente B, es decir, si el morfismo

$$A[x_1, \dots, x_r] \to B, \sum_{n_1, \dots, n_r} a_{n_1, \dots, n_r} x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r} \mapsto \sum_{n_1, \dots, n_r} f(a_{n_1, \dots, n_r}) \xi_1^{n_1} \cdots \xi_r^{n_r}$$

es epiyectivo.

7. Corolario: *Sea k un cuerpo. Toda k-álgebra de tipo finito es noetheriana.*

Demostración. Todo cuerpo es un anillo noetheriano, luego k es noetheriano. Por el teorema de la base de Hilbert $k[x_1]$ es noetheriano. De nuevo, por el teorema de la base de Hilbert, $k[x_1,x_2]$ es noetheriano. En conclusión $k[x_1,\dots,x_n]$ es noetheriano y todo cociente $k[x_1,\dots,x_n]/I$ también. Luego toda k-álgebra de tipo finito es noetheriana. □

8. Definición: Sean B y C dos A-álgebras. Diremos que un morfismo de anillos $\phi\colon B\to C$ es un morfismo de A-álgebras si $\phi(a)=a$ para todo $a\in A$.

Si $\phi\colon B\to C$ es un morfismo de A-álgebras, $a_{n_1,\dots,n_r}\in A$, $b_1,\dots,b_r\in B$, entonces $\phi(\sum_{n_1,\dots,n_r} a_{n_1,\dots,n_r}b_1^{n_1}\cdots b_r^{n_r})=\sum_{n_1,\dots,n_r} a_{n_1,\dots,n_r}\phi(b_1)^{n_1}\cdots\phi(b_r)^{n_r}$.

9. Notación: $\operatorname{Hom}_{A-alg}(B,C)$ denotará el conjunto de los morfismos de A-álgebras de B en C.

10. Ejercicio: Prueba que la aplicación

$$\operatorname{Hom}_{A-alg}(A[x_1,\dots,x_r],C)\to C^r,\ \ \phi\mapsto(\phi(x_1),\dots,\phi(x_r))$$

es biyectiva.

11. Proposición: *Sea C una A-álgebra. Las asignaciones*

$$\begin{array}{rcl}
\operatorname{Hom}_{A-alg}(A[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r),C) & \longleftrightarrow & \{(c_1,\dots,c_n)\in C^n : \left\{\begin{array}{c} p_1(c_1,\dots,c_n)=0\\ \cdots \\ p_r(c_1,\dots,c_n)=0\end{array}\right. \}\\
\phi & \longmapsto & (\phi(\bar x_1),\dots,\phi(\bar x_n))\\
\tilde\phi(\overline{q(x_1,\dots,x_n)}):=q(c_1,\dots,c_n),\qquad \tilde\phi & \longleftarrow\!\shortmid & (c_1,\dots,c_n)
\end{array}$$

son inversas entre sí.

12. Todo morfismo de k-álgebras

$$f\colon k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)\to k[y_1,\dots,y_m]/(q_1,\dots,q_s),\ f(\bar x_i)=\overline{f_i(y_1,\dots,y_m)}$$

induce la aplicación

$$\begin{array}{rcl}
\operatorname{Hom}_{k-alg}(k[y_1,\dots,y_m]/(q_1,\dots,q_s),k) & \xrightarrow{f^*} & \operatorname{Hom}_{k-alg}(k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r),k)\\
g & \mapsto & g\circ f
\end{array}$$

Si $\beta_i = g(\bar{y}_i)$, entonces $(g\circ f)(\bar{x}_i) = g(\overline{f_i(y_1,\dots,y_m)}) = f_i(\beta_1,\dots,\beta_m)$ y tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{k-alg}(k[y_1,\dots,y_m]/(q_1,\dots,q_s),k) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Hom}_{k-alg}(k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r),k) \\
\| & & \| \\
\left\{\text{Sol.}\begin{array}{c} q_1(y_1,\dots,y_m)=0 \\ \cdots \\ q_s(y_1,\dots,y_m)=0\end{array}\right\} & \longrightarrow & \left\{\text{Sol.}\begin{array}{c} p_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \cdots \\ p_r(x_1,\dots,x_n)=0\end{array}\right\} \\
 & & \\
(\beta_1,\dots,\beta_m) & \longmapsto & (f_1(\beta_1,\dots,\beta_m),\dots,f_n(\beta_1,\dots,\beta_m))
\end{array}$$

1.5. Localización por un sistema multiplicativo

1. Definición: Sea A un anillo y $S\subseteq A$ un subconjunto. Diremos que S es un sistema multiplicativo de A si cumple

1. $1\in S$.
2. Si $s,s'\in S$ entonces $s\cdot s'\in S$.

2. Ejemplos: $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ es un sistema multiplicativo de $\mathbb{Z}$. Si A es un anillo íntegro, entonces $A\backslash\{0\}$ es un sistema multiplicativo.

Si $\mathfrak{p}_x\subset A$ es un ideal primo, entonces $A\backslash\mathfrak{p}_x$ es un sistema multiplicativo. Denotaremos $A_x = A_{A\backslash\mathfrak{p}_x}$.

Dado $a\in A$, $S=\{1,a,a^2,\dots,a^n,\dots\}$ es un sistema multiplicativo. Denotaremos $A_a = A_{\{}1,a,a^2,\dots,a^n,\dots\}$.

Sea A un anillo y $S\subset A$ un sistema multiplicativo de A. Podemos definir en el conjunto $A\times S$ la siguiente relación de equivalencia:

$$(a,s)\sim(a',s') \iff \text{existen } s_1,s_2\in S \text{ tales que } (as_1,ss_1)=(a's_2,s's_2).$$

Denotaremos $\frac{a}{s}$ a la clase de equivalencia de (a,s).

3. Definición: Sea A un anillo y $S\subset A$ un sistema multiplicativo de A. La localización de A por S, A_S, es el conjunto

$$A_S := \left\{\frac{a}{s},\ \forall\, a\in A \text{ y } \forall\, s\in S\right\}$$

Observemos que $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$ si y solo si existen $s_1, s_2 \in S$ tales que $as_1 = a's_2$ y $ss_1 = s's_2$. Luego, $\frac{a}{s} = \frac{as_1}{ss_1} = \frac{a's_2}{s's_2} = \frac{a'}{s'}$, donde las fracciones del medio tienen igual numerador y denominador. Ahora es fácil probar la siguiente afirmación:

Sea B un conjunto. Dar una aplicación $A_S \to B$ es asignar a cada $\frac{a}{s} \in A_S$ un elemento $\varphi(a,s) \in B$ de modo que $\varphi(at, st) = \varphi(a,s)$ para todo $t \in S$.

Con mayor generalidad, dar una aplicación $A_S \times \overset{n}{\cdots} \times A_S \to B$ es asignar a cada elemento $(\frac{a_1}{s_1}, \dots, \frac{a_n}{s_n}) \in A_S \times \overset{n}{\cdots} \times A_S$ un elemento $\varphi(a_1, s_1, \dots, a_n, s_n) \in B$ de modo que cumple que $\varphi(t_1a_1, t_1s_1, \dots, t_na_n, t_ns_n) = \varphi(a_1, s_1, \dots, a_n, s_n)$ para todo $t_1, \dots, t_n \in S$.

Con la suma y producto ordinarios de fracciones (bien definidos)

$$\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} := \frac{s'a + sa'}{ss'}$$
$$\frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} := \frac{aa'}{ss'}$$

A_S es un anillo. El elemento unidad de A_S es la fracción $\frac{1}{1}$. Si $s \in S$ entonces la fracción $\frac{s}{1}$ es invertible, de inverso $\frac{1}{s}$. La fracción $\frac{0}{s} = \frac{0 \cdot s}{1 \cdot s} = \frac{0}{1}$ es el elemento nulo de A_S.

4. Definición: Al morfismo natural de anillos $A \to A_S$, $a \mapsto \frac{a}{1}$ se le denomina morfismo de localización por S.

Denotaremos $\frac{a}{1} = a$, cuando no sea causa de confusión.

5. Definición: Si A es un anillo íntegro, obviamente $A_{A\setminus\{0\}}$ es un cuerpo y diremos que es el cuerpo de fracciones de A.

6. Ejemplos:

1. $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$,
2. $\mathbb{Q}(x) := \mathbb{Q}[x]_{\mathbb{Q}[x]\setminus\{0\}}$
3. $k(x) := k[x]_{k[x]\setminus\{0\}} = \{p(x)/q(x) \colon\ p(x), q(x) \in k[x], q(x) \neq 0\}$, o con mayor generalidad, el cuerpo de funciones racionales en n-variables con coeficientes en k,

$$k(x_1, \dots, x_n) := k[x_1, \dots, x_n]_{k[x_1,\dots,x_n]\setminus\{0\}} = \{\frac{p(x)}{q(x)} \colon 0 \neq q(x), p(x) \in k[x_1, \dots, x_n]\}$$

7. Proposición: *Sea A_S la localización de A por S. Entonces,*

1. $\frac{a}{s} = 0$ *si y solo si existe $s' \in S$ tal que $s' \cdot a = 0$ (en A).*
2. $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$ *en A_S si y solo si existe un $t \in S$ de modo que $t \cdot (as' - a's) = 0$.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$) $0 = \frac{0}{1} = \frac{a}{s}$ luego existen $t, t' \in S$ tales que $t \cdot 0 = t' \cdot a$ (y $t \cdot 1 = t' \cdot s$), luego $t' \cdot a = 0$.

$\Leftarrow$) $\frac{a}{s} = \frac{as'}{ss'} = \frac{0}{ss'} = \frac{0}{1} = 0$.

2. $\Rightarrow$) $0 = \frac{a}{s} - \frac{a'}{s'} = \frac{as'-a's}{ss'}$, existe un $t \in S$ de modo que $t \cdot (as' - a's) = 0$, por el punto 1.

$\Leftarrow$) Si $t \cdot (as' - a's) = 0$, entonces $0 = \frac{as'-a's}{ss'} = \frac{a}{s} - \frac{a'}{s'}$, entonces $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$.

□

8. Ejercicio: Sea A un anillo y $S \subseteq A$ un sistema multiplicativo. Entonces, $A_S = \{0\} \iff 0 \in S$.

9. Ejercicio: Sea A un anillo íntegro y $S \subseteq A \backslash \{0\}$ un sistema multiplicativo. Entonces, $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$ en A_S si y solo si $as' - a's = 0$ (en A).

10. Ejercicio: Prueba que $(\mathbb{Z}[x])_{\mathbb{Z}\backslash\{0\}} = \mathbb{Q}[x]$.

Observemos que si $J \subset A_S$ es un ideal de A_S, entonces $I := \{a \in A : \frac{a}{1} \in J\}$ es un ideal de A y $J = I \cdot A_S$. Ahora es fácil probar la siguiente proposición.

11. Proposición: *Si A es un anillo noetheriano, entonces A_S es un anillo noetheriano.*

12. Proposición: *Sea A una k-álgebra de tipo finito y $a \in A$. Entonces, A_a es una k-álgebra de tipo finito.*

Demostración. Escribamos $A = k[\xi_1, \dots, \xi_n]$, entonces $A_a = A[\frac{1}{a}] = k[\xi_1, \dots, \xi_n, \frac{1}{a}]$. □

13. Ejercicio: Sea A un anillo y $a \in A$. Prueba que A_a es isomorfo a $A[x]/(ax-1)$.

Solución: La aplicación $A[x] \to A_a$, $p(x) \mapsto p(\frac{1}{a})$ es un morfismo de k-álgebras epiyectivo. Evidentemente, $ax-1$ está en el núcleo del morfismo, luego tenemos el epimorfismo $A[x]/(ax-1) \to A_a$, $\overline{p(x)} \mapsto p(\frac{1}{a})$. El morfismo $A_a \to A[x]/(ax-1)$, $\frac{b}{a^n} \mapsto \overline{bx^n}$ está bien definido y es el morfismo inverso.

1.5.1. Localización de módulos

Sea S un sistema multiplicativo de un anillo A y M un A-módulo. Podemos definir en el conjunto $M \times S$ la siguiente relación de equivalencia:

$$(m,s) \sim (m',s') \iff \text{existen } s_1, s_2 \in S \text{ tales que } (s_1 m, s_1 s) = (s_2 m', s_2 s').$$

Denotaremos $\frac{m}{s}$ a la clase de equivalencia de (m,s).

14. Definición: Sea S un sistema multiplicativo de un anillo A y M un A-módulo, denotaremos por M_S:

$$M_S = \{\frac{m}{s}, \ \forall\, m \in M, s \in S\}$$

y diremos que M_S es la localización de M por el sistema multiplicativo S.

Recordemos que que $\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'}$ si y solo si existen $s_1, s_2 \in S$ tales que $(s_1 m, s_1 s) = (s_2 m', s_2 s')$. Para definir una aplicación $M_S \to X$, tenemos que asignar a cada $\frac{m}{s} \in M_S$ un elemento $\phi(m,s)$, de modo que $\phi(tm,ts) = \phi(m,s)$, para todo $t \in S$. Igualmente, para definir una aplicación $M_S \times N_S \to X$, tenemos que asignar a cada $(\frac{m}{s}, \frac{n}{s'}) \in M_S \times N_S$ un elemento $\phi(m,s,n,s')$, de modo que $\phi(tm,ts,t'n,t's') = \phi(m,s,n,s')$, para todo $t,t' \in S$.

Con las operaciones (bien definidas)

$$\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} := \frac{s'm + sm'}{ss'}$$
$$\frac{a}{s} \cdot \frac{m}{s'} := \frac{am}{ss'}$$

M_S tiene estructura de A_S-módulo. La aplicación canónica

$$M \to M_S, \ m \mapsto \frac{m}{1}$$

es un morfismo de A-módulos y diremos que es el morfismo de localización.

15. Ejercicio: Prueba que $\frac{m}{s} = 0$ si y solo sí existe un $t \in S$ de modo que $t \cdot m = 0$.

Todo morfismo $f\colon M \to N$ de A-módulos, induce la aplicación (bien definida)

$$f_S\colon M_S \to N_S, \frac{m}{s} \underset{\text{def}}{\mapsto} \frac{f(m)}{s},$$

que es morfismo de A_S-módulos.

16. Proposición: *Sea A un anillo y $S \subset A$ un sistema multiplicativo. Sean M y M' dos A-módulos. Entonces,*

$$(M \oplus M')_S = M_S \oplus M'_S$$

Demostración. Los morfismos de A_S-módulos $(M \oplus M')_S \to M_S \oplus M'_S$, $\frac{(m,m')}{s} \mapsto (\frac{m}{s}, \frac{m'}{s})$ y $M_S \oplus M'_S \to (M \oplus M')_S$, $(\frac{m}{s}, \frac{m'}{s'}) \mapsto \frac{(s'm, sm')}{ss'}$ son inversos entre sí. □

17. Ejemplo: Sea A un anillo íntegro y $\Sigma = A_{A\setminus\{0\}}$. Entonces,

$$(A^n)_{A\setminus\{0\}} = A_{A\setminus\{0\}} \oplus \overset{n}{\cdots} \oplus A_{A\setminus\{0\}} = \Sigma^n.$$

18. Proposición: *Sea A un anillo y $S \subset A$ un sistema multiplicativo. Sea M un A-módulo y $N \subseteq M$ un submódulo. Entonces, N_S es un submódulo de M_S (es decir, el morfismo $N_S \to M_S$ es inyectivo) y tenemos un isomorfismo natural*

$$M_S/N_S \simeq (M/N)_S.$$

Demostración. El morfismo $N_S \to M_S$ es inyectivo: Dado $\frac{n}{s} \in N_S$, si $\frac{n}{s} = 0$ en M_S, existe un elemento $s' \in S$ de modo que $s' \cdot n = 0$ en M (luego en N), por tanto $\frac{n}{s} = 0$ en N_S.

Consideremos el epimorfismo de paso al cociente $M \to M/N$. Localizando por S tenemos el morfismo $M_S \to (M/N)_S$, $m/s \mapsto \bar{m}/s$ que es claramente epiyectivo. Calculemos el núcleo: si $\bar{m}/s = 0$ entonces existe un elemento $s' \in S$ tal que $s' \cdot \bar{m} = 0$, es decir, $s' \cdot m \in N$, es decir, existe $n \in N$ de modo que $s' \cdot m = n$, luego $m/s = n/ss' \in N_S$. Recíprocamente, dado $n/s \in N_S$, entonces $\bar{n}/s = 0/s = 0$. □

19. Ejercicio: Sea $I \subseteq A$ un ideal y $S \subset A$ un sistema multiplicativo. Prueba que $I_S = I \cdot A_S$.

20. Proposición : *Sea A un anillo y $S \subset A$ un sistema multiplicativo y M un A-módulo. El morfismo $M \otimes_A A_S \to M_S$, $m \otimes \frac{a}{s} \mapsto \frac{am}{s}$ es un isomorfismo de A_S-módulos.*

Demostración. El morfismo inverso es $\frac{m}{s} \mapsto m \otimes \frac{1}{s}$.

□

1.6. Extensiones de cuerpos de tipo finito

1.6.1. Extensiones de cuerpos algebraicas

1. Sea $k \hookrightarrow \Sigma$ una extensión de cuerpos. Se dice que $\dim_k \Sigma$ es el grado de la k-extensión Σ. Si $\dim_k \Sigma < \infty$ se dice que Σ es una k-extensión de cuerpos finita.

Si $\dim_k \Sigma = n$ y Σ' es una Σ extensión de cuerpos tal que $\dim_\Sigma \Sigma' = m$, entonces $\Sigma' = \overset{m}{\oplus}\Sigma = \overset{m}{\oplus}(\overset{n}{\oplus}k) = \overset{nm}{\oplus} k$, luego

$$\boxed{\dim_k \Sigma' = \dim_k \Sigma \cdot \dim_\Sigma \Sigma'}$$

2. Definiciones: Sea $k \hookrightarrow \Sigma$ una extensión de cuerpos. Diremos que $\alpha \in \Sigma$ es k-algebraico si existe un polinomio $p(x) \in k[x]$ no nulo tal que $p(\alpha) = 0$. Diremos que Σ es una k-extensión algebraica si todo elemento de Σ es k-algebraico. Diremos que α es k-trascendente si no es k-algebraico.

3. Ejemplo: Consideremos la extensión de cuerpos $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{C}$. Entonces, $\sqrt{2} \in \mathbb{C}$ es $\mathbb{Q}$-algebraico y $\pi \in \mathbb{C}$ es $\mathbb{Q}$-trascendente.

4. Proposición: *Sea $k \hookrightarrow \Sigma$ una extensión de cuerpos. Entonces, $\alpha \in \Sigma$ es k-algebraico si y solo si* $\dim_k k(\alpha) < \infty$.

Demostración. $\Rightarrow$) Consideremos morfismo de anillos $\pi\colon k[x] \to k(\alpha)$, $\pi(p(x)) := p(\alpha)$. Tenemos que $\operatorname{Ker}\pi = (q(x))$ con $q(x)$ no nulo. Ademas, $q(x)$ es irreducible ya que $k[x]/(q(x))$ es íntegro ya que $k[x]/(q(x))$ se inyecta en $k(\alpha)$ que es íntegro. Por tanto, $k[x]/(q(x))$ es un cuerpo, que contiene a $\bar{x} = \alpha$, luego ha de coincidir con $k(\alpha)$. Por último, $\dim_k k(\alpha) = \dim_k k[x]/(q(x)) = \operatorname{gr}(q(x)) < \infty$.

$\Leftarrow$) Sea $\dim_k k(\alpha) = n < \infty$. Los $n+1$ elementos $1, \alpha, \dots, \alpha^n$ son k-linealmente independientes, luego existen $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in k$ (no todos nulos) tales $\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 \cdot \alpha + \cdots + \lambda_n \alpha^n = 0$. Por tanto, α es raíz del polinomio no nulo $\lambda_0 + \lambda_1 \cdot x + \cdots + \lambda_n x^n$.

□

5. Sea $k \hookrightarrow \Sigma$ una extensión de cuerpos y $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Sigma$, se define $k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ como el mínimo subcuerpo de Σ que contiene a k, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ y puede comprobarse que

$$k(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{p(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}{q(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} \in \Sigma;\ \forall\, p(x_1,\dots,x_n), q(x_1,\dots,x_n) \in k[x_1,\dots,x_n] \\ \hfill \text{con } q(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \neq 0. \end{array} \right\}$$

Si $\Sigma = k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ se dice que Σ es una k-extensión de cuerpos de tipo finito.

6. Ejemplo: Sea $A = k[x_1, \dots, x_n]/I$ una k-álgebra de tipo finito íntegra. Entonces $A_{A-\{0\}} = k(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ y es una k-extensión de cuerpos de tipo finito.

7. Proposición: *Sea $k \hookrightarrow k(\xi_1, \dots, \xi_n)$ una extensión de cuerpos de tipo finito. Las siguientes condiciones son equivalentes*

1. *$k(\xi_1, \dots, \xi_n)$ es una k-extensión algebraica.*
2. *$\xi_1, \dots, \xi_n$ son k-algebraicos.*
3. *$k(\xi_1, \dots, \xi_n)$ es una k-extensión de cuerpos finita.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Es obvio.

2. $\Rightarrow$ 3. Consideremos la cadena de inclusiones

$$k \hookrightarrow k(\xi_1) \hookrightarrow k(\xi_1, \xi_2) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow k(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \hookrightarrow k(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Entonces,

$$\dim_k k(\xi_1,\dots,\xi_n) = \dim_k k(\xi_1)\cdot \dim_{k(\xi_1)} k(\xi_1,\xi_2)\cdots \dim_{k(\xi_1,\dots,\xi_{n-1})} k(\xi_1,\dots,\xi_n) < \infty.$$

3. $\Rightarrow$ 1. Dado $\alpha \in k(\xi_1,\dots,\xi_n)$, tenemos que $\dim_k k(\alpha) \le \dim_k k(\xi_1,\dots,\xi_n) < \infty$, luego α es k-algebraico y $k(\xi_1,\dots,\xi_n)$ es una k-extensión de cuerpos algebraica.

□

8. Corolario: *Sea $k \hookrightarrow \Sigma$ una extensión de cuerpos. El conjunto de todos los elementos k-algebraicos de Σ es una k-subextensión de cuerpos de Σ.*

9. Proposición: *La composición de extensiones de cuerpos algebraicas es algebraica.*

Demostración. Consideremos dos extensiones algebraicas $k \hookrightarrow K$ y $K \hookrightarrow \Sigma$. Dado $\alpha \in \Sigma$, existe un polinomio no nulo $p(x) = a_0x^n + \cdots + a_n \in K[x]$ tal que $p(\alpha) = 0$. Las extensiones de cuerpos $k \hookrightarrow k(a_0,\dots,a_n)$ y $k(a_0,\dots,a_n) \hookrightarrow k(a_0,\dots,a_n,\alpha)$ son finitas, luego

$$\dim_k k(a_0,\dots,a_n,\alpha) = \dim_k k(a_0,\dots,a_n)\cdot \dim_{k(a_0,\dots,a_n)} k(a_0,\dots,a_n,\alpha) < \infty.$$

Por tanto, $k(a_0,\dots,a_n,\alpha)$ es una k-extensión de cuerpos algebraica, α es k-algebraico y Σ es una k-extensión de cuerpos algebraica. □

10. Definición: Se dice que un cuerpo K es algebraicamente cerrado si todo polinomio con coeficientes en K descompone en factores simples, es decir, si todas las raíces del polinomio están en K. Se dice que una k-extensión algebraica de cuerpos K es el cierre algebraico de k, si K es un cuerpo algebraicamente cerrado.

Si K es un cuerpo algebraicamente cerrado y $K \hookrightarrow \Sigma$ es una extensión de cuerpos algebraica, entonces $K = \Sigma$, ya que todo $\alpha \in \Sigma$ es raíz de un polinomio $p(x)$ con coeficientes en K y todas las raíces de $p(x)$ están en K.

Si $k \hookrightarrow K$ y $k \hookrightarrow K'$ son el cierre algebraico de k, sea $\mathfrak{m} \subset K \otimes_k K'$ un ideal maximal y $\Sigma = (K \otimes_k K')/\mathfrak{m}$. Entonces, $K \hookrightarrow \Sigma$ es una extensión algebraica, luego $K \simeq \Sigma$, e igualmente $K' \simeq \Sigma$. En conclusión, existe un isomorfismo de k-algebras $K \simeq K'$.

El teorema fundamental del Álgebra afirma que $\mathbb{C}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado. Dado un cuerpo k, puede probarse que el cierre algebraico de k es la k-extensión de cuerpos $k[x_p]_{p\in P}/(p(x_p))_{p\in P}\Big/\mathfrak{m}$, donde P es el conjunto de polinomios mónicos irreducibles y $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de $k[x_p]_{p\in P}$.

11. Ejercicio: Prueba que $\mathbb{C}$ es el cierre algebraico de $\mathbb{R}$.

1.6.2. Grado de trascendencia de una k-extensión de cuerpos de tipo finito

12. Definición: Sea Σ una k-extensión de cuerpos. Diremos que $\xi_1,\dots,\xi_n \in \Sigma$ son k-algebraicamente independientes cuando cualquier relación k-algebraica

$$\sum_{i_1\dots i_n} a_{i_1\dots i_n}\xi_1^{i_1}\dots\xi_n^{i_n} = 0, \text{ con coeficientes } a_{i_1\dots i_n} \in k$$

implica que todos los coeficientes $a_{i_1\dots i_n}$ son nulos.

Los elementos $\xi_1,\dots,\xi_n \in \Sigma$ son k-algebraicamente independientes si y solo si el morfismo de k-álgebras

$$\begin{aligned} k[x_1,\dots,x_n] &\to \Sigma \\ p(x_1,\dots,x_n) &\mapsto p(\xi_1,\dots,\xi_n) \end{aligned}$$

es inyectivo, y en este caso el morfismo $k(x_1,\dots,x_n)\to k(\xi_1,\dots,\xi_n)$, $\frac{p(x_1,\dots,x_n)}{q(x_1,\dots,x_n)} \mapsto \frac{p(\xi_1,\dots,\xi_n)}{q(\xi_1,\dots,\xi_n)}$ es un isomorfismo.

13. Ejercicio: Sea Σ una k-extensión de cuerpos y $\xi_1,\dots,\xi_n \in \Sigma$ k-algebraicamente independientes. Dado $\alpha\in\Sigma$ se cumple que $\xi_1,\dots,\xi_n,\alpha$ son k-algebraicamente independientes si y solo si α es $k(\xi_1,\dots,\xi_n)$-trascendente.

14. Definición: Sea $k\to\Sigma$ una extensión de cuerpos. Diremos que $\xi_1,\dots,\xi_n\in\Sigma$ forman una base de trascendencia de Σ sobre k, si son k-algebraicamente independientes y Σ es una $k(\xi_1,\dots,\xi_n)$-extensión algebraica.

15. Proposición: *Sea $k\to\Sigma$ una extensión de cuerpo, $\xi_1,\dots,\xi_n\in\Sigma$ y $\eta_1,\dots,\eta_m\in\Sigma$ dos bases de k-trascendencia de Σ. Entonces, $n=m$.*

Demostración. Probemos que Σ es una extensión algebraica de $k(\xi_1,\dots,\xi_i,\eta_{i+1},\dots,\eta_m)$, dado $0\le i\le n$, reordenando si es preciso los elementos η_j. Procedemos por inducción sobre i. Si $i=0$ sabemos que $k(\eta_1,\dots,\eta_m)\hookrightarrow\Sigma$ es algebraica. Si $i\ge 1$, por hipótesis de inducción ξ_i es $k(\xi_1,\dots,\xi_{i-1},\eta_i,\dots,\eta_m)$-algebraico. Existe un polinomio no nulo de grado mínimo $p(x_1,\dots,x_i,y_i,\dots,y_m)\in k[x_1,\dots,x_i,y_i,\dots,y_m]$ tal que $p(\xi_1,\dots,\xi_i,\eta_i,\dots,\eta_m)=0$. Como $\xi_1,\dots,\xi_i$ son algebraicamente independientes, alguna de las variables y_j (podemos suponer reordenando que $j=i$) aparece en el polinomio antes mencionado y $p(\xi_1,\dots,\xi_i,x,\eta_{i+1},\dots,\eta_m)\neq 0$. Por tanto, η_i es algebraico sobre $k(\xi_1,\dots,\xi_i,\eta_{i+1},\dots,\eta_m)$ y se tienen las extensiones algebraicas

$$k(\xi_1,\dots,\xi_{i-1},\xi_i,\eta_{i+1},\dots,\eta_m)\hookrightarrow k(\xi_1,\dots,\xi_{i-1},\xi_i,\eta_i,\eta_{i+1},\dots,\eta_m)\hookrightarrow\Sigma$$

luego Σ es algebraico sobre $k(\xi_1,\dots,\xi_i,\eta_{i+1},\dots,\eta_m)$.

Ahora, si m fuera menor estricto que n, tendríamos que Σ es algebraico sobre $k(\xi_1,\dots,\xi_m)$, contra la hipótesis de que $\xi_1,\dots,\xi_m,\xi_{m+1}$ son k-algebraicamente independientes. Igualmente obtenemos que n no puede ser menor estricto m. □

16. Teorema: *Sea $k \hookrightarrow \Sigma = k(\xi_1,\dots,\xi_r)$ una extensión de cuerpos de tipo finito. Existen bases de trascendencia de Σ sobre k.*

Demostración. Sea n el número máximo de los elementos $\xi_1,\dots,\xi_n$ k-algebraicamente independientes. Reordenandolos, si fuera preciso, podemos suponer que $\xi_1,\dots,\xi_n$ son k-algebraicamente independientes y que $\xi_1,\dots,\xi_n,\xi_i$ no son k-algebraicamente independientes para todo $i > n$. Por tanto, existe un polinomio no nulo $p(x_1,\dots,x_n,x_i) \in k[x_1,\dots,x_n,x_i]$ tal que $p(\xi_1,\dots,\xi_n,\xi_i) = 0$. Como $\xi_1,\dots,\xi_n$ son algebraicamente independientes, la variable x_i ha de aparecer en el polinomio $p(x_1,\dots,x_n,x_i)$ y ξ_i es raíz de $p(\xi_1,\dots,\xi_n,x) \in k(\xi_1,\dots,\xi_n)[x]$. Por tanto, ξ_i es $k(\xi_1,\dots,\xi_n)$-algebraico, para todo $i > n$. Por 3.2.2, Σ es una extensión algebraica de $k(\xi_1,\dots,\xi_n)$, luego $\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$ es una base de trascendencia de Σ sobre k.

□

17. Definición: El número de elementos de una base de trascendencia de una extensión de cuerpos $k \hookrightarrow \Sigma$ se dice que es el <u>grado de trascendencia</u> de Σ sobre k y se denota $\operatorname{gr}\operatorname{tr}_k \Sigma$.

18. Ejemplo: Sea k un cuerpo. El cuerpo de fracciones polinómicas en n variables $k(x_1,\dots,x_n)$ tiene grado de trascendencia n, porque las funciones $x_1,\dots,x_n$ forman claramente una base de trascendencia sobre k.

19. Ejemplo: Sea $p(x_1,\dots,x_n)$ un polinomio irreducible no constante con coeficientes en un cuerpo k. Sea $k(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)$ el cuerpo de fracciones de $k[x_1,\dots,x_n]/(p(x_1,\dots,x_n))$, que se denomina cuerpo de funciones racionales de la hipersuperficie definida por la ecuación $p(x_1,\dots,x_n) = 0$. Se cumple que $k(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)$ tiene grado de trascendencia $n-1$ sobre k. En efecto, reordenando las variables, podemos suponer que el grado de $p(x_1,\dots,x_n)$ en x_n es ≥ 1; es fácil ver entonces que $\{\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_{n-1}\}$ es una base de trascendencia.

1.7. Cuestionario

1. ¿Es $\mathbb{Q}$ un $\mathbb{Z}$-módulo noetheriano?
2. ¿Es $\mathbb{Q}[x]$ un $\mathbb{Z}$-módulo noetheriano?¿Es $\mathbb{Q}[x]$ un anillo noetheriano?

3. ¿Es $\mathbb{Z}[x_1,x_2,x_3]$ un anillo noetheriano?

4. Sea $A \to B$ un morfismo de anillos. Si A es un anillo noetheriano y B, que es de modo natural un A módulo, resulta que es un A-módulo finito generado ¿es B un anillo noetheriano?

5. ¿Es el cociente de un anillo noetheriano por un ideal un anillo noetheriano?

6. Sea $M = \langle m_i \rangle_{i\in I}$ un A-módulo noetheriano. Prueba que existe un subconjunto finito $J \subset I$ tal que $M = \langle m_j \rangle_{j\in J}$.

7. Sea Y un conjunto y $p_i(x_1,\dots,x_n) = 0$, $\forall\, i \in Y$, un sistema de ecuaciones k-algebraico en n variables. Prueba que salvo un número finito de las ecuaciones todas las demás son redundantes.

8. Sea I un ideal de un anillo A y sea S un sistema multiplicativo de A. Prueba que I_S es un ideal del anillo de fracciones A_S.

9. ¿Es el cociente de una k-álgebra de tipo finito por un ideal una k-álgebra de tipo finito?

10. ¿Toda extensión finita de cuerpos es una extensión de tipo finito?¿Toda extensión de cuerpos de tipo finito es una extensión de cuerpos finita?

11. Da un ejemplo de extensión de cuerpos que no sea de tipo finito.

12. ¿Cuál es el grado de trascendencia de una extensión de cuerpos algebraica?

1.8. Biografía de Emmy Noether

NOETHER BIOGRAPHY

Emmy Noether's father, Max Noether, was a distinguished mathematician and a professor at Erlangen but he came from a family of wholesale hardware dealers. Her mother was Ida Amalia Kaufmann (1852-1915), from a wealthy Cologne family. Both Emmy's parents were of Jewish origin and the reader may be surprised at this since Noether is not a Jewish name. We should explain, therefore, how this came about and, at the same time, give some information on Emmy Noether's ancestors. Max Noether's paternal grandfather was Elias Samuel, the founder of a business in Bruchsal. Elias had nine children, one being a son Hertz Samuel. In 1809 the State of Baden made the Tolerance Edict which required Jews to adopt

Germanic names. Elias Samuel chose the surname Nöther, becoming Elias Nöther, but also changed the given names of his children, giving Hertz the name Hermann. When he was eighteen years old, Hermann Nöther left his home town of Bruchsal and studied theology at the University of Mannheim. Then in 1837, together with his brother Joseph, he set up a wholesale business in iron hardware. Hermann Nöther and his wife Amalia had five children, the third of which was Max. The two children older than Max were Sarah (born 6 November 1839) and Emil. It is worth noting at this point that the Nöther iron-wholesaling business remained a family firm for exactly one hundred years, until the Nazis removed Jewish families from their own businesses in 1937. One other comment is necessary at this point. Although the family name was chosen to be Nöther by Max's grandfather, Max and his family always used the form Noether (except on Max's wedding certificate where the form Nöther appears).

Emmy was the eldest of her parents' four children, the three younger children being boys. Alfred Noether (1883-1918) studied chemistry and was awarded a doctorate from Erlangen in 1909. However, his career was short since he died nine years later. Fritz Noether (1884-1941) became an applied mathematician. However, as a Jew he was unable to work and left Germany in 1937. He was appointed as a professor at the University of Tomsk in the Soviet Union but accused of anti-Soviet acts he was sentenced to death and shot. He was found not guilty by the Supreme Court of the Soviet Union in 1988. Gustav Robert Noether (1889-1928) had bad health all his life. He was mentally handicapped, spent most of his life in an institution and died young. The first school that Emmy attended was on Fahrstrasse. Auguste Dick wrote:

Emmy did not appear exceptional as a child. Playing among her peers in the schoolyard on Fahrstrasse she probably was not especially noticeable - a near-sighted, plain-looking little girl, though not without charm. Her teachers and classmates knew Emmy as a clever, friendly, and likeable child. She had a slight lisp and was one of the few who attended classes in the Jewish religion.

After elementary school, Emmy Noether attended the Städtische Höhere Töchter Schule on Friedrichstrasse in Erlangen from 1889 until 1897. She had been born in the family home at Hauptstrasse 23 and lived there until, in the middle of her time at high school, in 1892, the family moved to a larger apartment at Nürnberger Strasse 32. At the high school she studied German, English, French, arithmetic and was given piano lessons. She loved dancing and looked forward to parties with children of her father's university colleagues. At this stage her aim was to become a language teacher and after further study of English and French she took the examinations of the State of Bavaria and, in 1900, became a certificated teacher of English and French in Bavarian girls schools. She was awarded the grade of "very good" in the examinations, the weakest part being her classroom teaching.

However Noether never became a language teacher. Instead she decided to take the difficult route for a woman of that time and study mathematics at university. Women were allowed to study at German universities unofficially and each professor had to give permission for his course. Noether obtained permission to sit in on courses at the University of Erlangen during 1900 to 1902. She was one of only two female students sitting in on courses at Erlangen and, in addition to mathematics courses, she continued her interest in languages being taught by the professor of Roman Studies and by an historian. At the same time she was preparing to take the examinations which allowed a student to enter any university. Having taken and passed this matriculation examination in Nürnberg on 14 July 1903, she went to the University of Göttingen. During 1903-04 she attended lectures by Karl Schwarzschild, Otto Blumenthal, David Hilbert, Felix Klein and Hermann Minkowski. Again she was not allowed to be a properly matriculated student but was only allowed to sit in on lectures. After one semester at Göttingen she returned to Erlangen.

At this point the rules were changed and women students were allowed to matriculate on an equal basis to the men. On 24 October 1904 Noether matriculated at Erlangen where she now studied only mathematics. In 1907 she was granted a doctorate after working under Paul Gordan. The oral examination took place on Friday 13 December and she was awarded the degree 'summa cum laude'. Hilbert's basis theorem of 1888 had given an existence result for finiteness of invariants in n variables. Gordan, however, took a constructive approach and looked at constructive methods to arrive at the same results. Noether's doctoral thesis followed this constructive approach of Gordan and listed systems of 331 covariant forms. Colin McLarty wrote that:

... her dissertation of 1908 with Gordan pursued a huge calculation that had stumped Gordan forty years before and which Noether could not complete either. So far as I know no one has ever completed it or even checked it as far as she went. It was old-fashioned at the time, a witness to the pleasant isolation of Erlangen, and made no use of Gordan's own work building on Hilbert's ideas.

Having completed her doctorate the normal progression to an academic post would have been the habilitation. However this route was not open to women so Noether remained at Erlangen, helping her father who, particularly because of his own disabilities, was grateful for his daughter's help. Noether also worked on her own research, in particular she was influenced by Ernst Fischer who had succeeded Gordan to the chair of mathematics when he retired in 1911. Noether wrote about Fischer's influence:

Above all I am indebted to Mr E Fischer from whom I received the decisive impulse to study abstract algebra from an arithmetical viewpoint, and this remained the governing idea for all my later work.

Fischer's influence took Noether towards Hilbert's abstract approach to the subject and away from the constructive approach of Gordan. Now this was very important to her development as a mathematician for Gordan, despite his remarkable achievements, had his limitations. Noether's father, Max Noether, said of Gordan:

Gordan was never able to do justice to the development of fundamental concepts; even in his lectures he completely avoided all basic definitions of a conceptual nature, even that of the limit.

Noether's reputation grew quickly as her publications appeared. In 1908 she was elected to the Circolo Matematico di Palermo, then in 1909 she was invited to become a member of the Deutsche Mathematiker-Vereinigung and in the same year she was invited to address the annual meeting of the Society in Salzburg. She gave the lecture Zur Invariantentheorie der Formen von n Variabeln (On the theory of invariants for the forms of n variables). In 1913 she lectured in Vienna, again to a meeting of the Deutsche Mathematiker-Vereinigung. Her lecture on this occasion was Über rationale Funktionenkörper (On fields of rational functions). While in Vienna she visited Franz Mertens and discussed mathematics with him. One of Merten's grandsons remembered Noether's visit:

... although a woman, [she] seemed to me like a Catholic chaplain from a rural parish - dressed in a black, almost ankle-length and rather nondescript, coat, a man's hat on her short hair ... and with a shoulder bag carried crosswise like those of the railway conductors of the imperial period, she was rather an odd figure.

During these years in Erlangen she advised two doctoral students who were both officially supervised by her father. These were Hans Falckenberg (doctorate 1911) and Fritz Seidelmann (doctorate 1916).

In 1915 Hilbert and Klein invited Noether to return to Göttingen. The reason for this was that Hilbert was working on physics, in particular on ideas on the theory of relativity close to those of Albert Einstein. He decided that he needed the help of an expert on invariant theory and, after discussions with Klein, they issued the invitation. Van der Waerden wrote:

She came and at once solved two important problems. First: How can one obtain all differential covariants of any vector or tensor field in a Riemannian space? ... The second problem Emmy investigated was a problem from special relativity. She proved: To every infinitesimal transformation of the Lorentz group there corresponds a Conservation Theorem.

This result in theoretical physics is sometimes referred to as Noether's Theorem, and proves a relationship between symmetries in physics and conservation principles. This basic result in the theory of relativity was praised by Einstein in a letter to Hilbert when he referred to Noether's penetrating mathematical thinking. Of course, she arrived in Göttingen during World War I. This was a time of extreme difficulty and she lived in poverty during these years and politically she became a radical socialist. However, they were extraordinarily rich years for her mathematically. Hermann Weyl, in wrote about Noether's political views:

During the wild times after the Revolution of 1918, she did not keep aloof from the political excitement, she sided more or less with the Social Democrats; without being actually in party life she participated intensely in the discussion of the political and social problems of the day. ... In later years Emmy Noether took no part in matters political. She always remained, however, a convinced pacifist, a stand which she held very important and serious.

Hilbert and Klein persuaded her to remain at Göttingen while they fought a battle to have her officially on the Faculty. In a long battle with the university authorities to allow Noether to obtain her habilitation there were many setbacks and it was not until 1919 that permission was granted and she was given the position of Privatdozent. During this time Hilbert had allowed Noether to lecture by advertising her courses under his own name. For example a course given in the winter semester of 1916-17 appears in the catalogue as:

Mathematical Physics Seminar: Professor Hilbert, with the assistance of Dr E Noether, Mondays from 4-6, no tuition.

At Göttingen, after 1919, Noether moved away from invariant theory to work on ideal theory, producing an abstract theory which helped develop ring theory into a major mathematical topic. Idealtheorie in Ringbereichen (1921) was of fundamental importance in the development of modern algebra. In this paper she gave the decomposition of ideals into intersections of primary ideals in any commutative ring with ascending chain condition. Emanuel Lasker (who became the world chess champion) had already proved this result for a polynomial ring over a field. Noether published Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahlkorpern in 1924. In this paper she gave five conditions on a ring which allowed her to deduce that in such commutative rings every ideal is the unique product of prime ideals.

In the same year of 1924 B.L. van der Waerden came to Göttingen and spent a year studying with Noether. After returning to Amsterdam van der Waerden wrote his book Moderne Algebra in two volumes. The major part of the second volume consists of Noether's work. From 1927 onwards Noether collaborated with Helmut Hasse and Richard Brauer in work on non-commutative algebras. They wrote a beautiful paper joint paper Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren which was published in 1932. In addition to teaching and research, Noether helped edit Mathematische Annalen. Much of her work appears in papers written by colleagues and students, rather than under her own name.

Further recognition of her outstanding mathematical contributions came with invitations to address the International Congress of Mathematicians at Bologna in September 1928 and again at Zurich in September 1932. Her address to the 1932 Congress was entitled Hyperkomplexe Systeme in ihren Beziehungen zur kommutativen

Algebra und zur Zahlentheorie. In 1932 she also received, jointly with Emil Artin, the Alfred Ackermann-Teubner Memorial Prize for the Advancement of Mathematical Knowledge. In April 1933 her mathematical achievements counted for nothing when the Nazis caused her dismissal from the University of Göttingen because she was Jewish. She received no pension or any other form of compensation but, nevertheless, she considered herself more fortunate than others. She wrote to Helmut Hasse on 10 May 1933:

Many thanks for your dear compassionate letter! I must say, though, that this thing is much less terrible for me than it is for many others. At least I have a small inheritance (I was never entitled to a pension anyway) which allows me to sit back for a while and see.

Weyl spoke about Noether's reaction to the dire events that were taking place around her in the address he gave at her funeral:

You did not believe in evil, indeed it never occurred to you that it could play a role in the affairs of man. This was never brought home to me more clearly than in the last summer we spent together in Göttingen, the stormy summer of 1933. In the midst of the terrible struggle, destruction and upheaval that was going on around us in all factions, in a sea of hate and violence, of fear and desperation and dejection - you went your own way, pondering the challenges of mathematics with the same industriousness as before. When you were not allowed to use the institute's lecture halls you gathered your students in your own home. Even those in their brown shirts were welcome; never for a second did you doubt their integrity. Without regard for your own fate, openhearted and without fear, always conciliatory, you went your own way. Many of us believed that an enmity had been unleashed in which there could be no pardon; but you remained untouched by it all.

She accepted a one-year visiting professorship at Bryn Mawr College in the USA and in October 1933 sailed to the United States on the ship Bremen to take up the appointment. She had hoped to delay accepting the invitation since she would have liked to have gone to Oxford in England but it soon became clear that she had to leave quickly. At Bryn Mawr she was made very welcome by Anna Johnson Pell Wheeler who was head of mathematics. Noether ran a seminar during the winter semester of 1933-34 for three students and one member of staff. They worked through the first volume of van der Waerden's Moderne Algebra. In February 1934 she began giving weekly lectures at the Institute for Advanced Study, Princeton. In a letter to Hasse, dated 6 March 1934, she wrote:

I have started with representation modules, groups with operators ...; Princeton will receive its first algebraic treatment this winter, and a thorough one at that. My audience consists mostly of research fellows, besides Albert and Vandiver, but I'm beginning to realise that I must be careful; after all, they are essentially used to explicit *computation and I have already driven a few of them away with my approach.*

Noether returned to Germany in the summer of 1934. There see saw her brother Fritz for what would be the last time, and visited Artin in Hamburg before going on to Göttingen. In 1980 Artin's wife recalled Noether's visit:

Now the one thing I remember most vividly is the trip on the Hamburg Untergrund, which is the subway in Hamburg. We picked up Emmy at the Institute, and she and Artin immediately started talking mathematics. At that time it was Idealtheorie, and they started talking about Ideal, Führer, and Gruppe, and Untergruppe, and the whole car suddenly started pricking up their ears. [Each of the German nouns has both mathematical and political meanings.] And I was frightened to death - I thought, my goodness, next thing's going to happen, somebody's going to arrest us. Of course, that was in 1934, and all. But Emmy was completely oblivious, and she talked very loudly and very excitedly, and got louder and louder, and all the time the "Führer" came out, and the "Ideal". She was very full of life, and she constantly talked very fast and very loud.

She returned to the United States where her visiting professorship at Bryn Mawr had been extended for a further year. She continued her weekly lectures at Princeton where Richard Brauer had now arrived. After her lectures she enjoyed talking about mathematics with Weyl, Veblen and Brauer.

Noether's death was sudden and unexpected. In April 1935 doctors discovered that she had a tumour. Two days later they operated, finding further tumours which they believed to be benign and did not remove. The operation seemed a success and for three days her condition improved. However, on the fourth day she suddenly collapsed and developed a very high temperature. She died later that day.

Weyl in his Memorial Address said:

Her significance for algebra cannot be read entirely from her own papers, she had great stimulating power and many of her suggestions took shape only in the works of her pupils and co-workers.

Van der Waerden wrote:

For Emmy Noether, relationships among numbers, functions, and operations became transparent, amenable to generalisation, and productive only after they have been dissociated from any particular objects and have been reduced to general conceptual relationships.

Although she received little recognition in her lifetime considering the remarkable advances that she made, she has been honoured in many ways following her death. A crater on the moon is named for her. A street in her hometown is named for her and the school she attended is now named the Emmy Noether School. Various organisations name scholarships and lectures after Emmy Noether.

Article by: J J O'Connor and E F Robertson (http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/

Biographies/)

1.9. Problemas

1. Sea M un A-módulo noetheriano. Prueba que todo endomorfismo de A-módulos epiyectivo $f\colon M \to M$ es un isomorfismo. (Indicación: Considera los submódulos $\operatorname{Ker} f^n$.)

2. Define una aplicación k-lineal epiyectiva $\overset{\mathbb{N}}{\oplus}\mathbb{Q} \to \overset{\mathbb{N}}{\oplus}\mathbb{Q}$ que no sea isomorfismo lineal.

3. Sean N y N_0 dos submódulos de un A-módulo M. Prueba que $N+N_0$ es un A-módulo noetheriano si y solo si N y N_0 son A-módulos noetherianos.

4. Sean N y N_0 dos submódulos de un A-módulo M tales que $N_0 \cap N = 0$. Prueba que M es un A-módulo noetheriano si y sólo si M/N y M/N_0 son A-módulos noetherianos.

5. Sea M un A-módulo noetheriano y N un A-módulo finito generado. Prueba que $\operatorname{Hom}_A(N,M)$ es un A-módulo noetheriano.

6. Sea M un A-módulo noetheriano e $I := \{a \in A : a\cdot m = 0, \forall\, m \in M\}$. Prueba que A/I es un anillo noetheriano.

7. Sea A un anillo noetheriano. Prueba que $\operatorname{rad}(A)^n = 0$ para algún exponente n. Si I es un ideal de A, prueba que $\operatorname{rad}(I)^n = I$ para algún exponente n.

8. ¿Es $\prod^{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ un anillo noetheriano?

9. Lema de Nakayama: Sea $\mathcal{O}$ un anillo local (i.e., con un único ideal maximal $\mathfrak{m}$) y M un $\mathcal{O}$-módulo finito generado. Prueba que $\mathfrak{m}\cdot M = M$ si y solo si $M = 0$. Prueba que $m_1,\dots,m_n$ generan M si y sólo si $\bar m_1,\dots,\bar m_n$ generan el $\mathcal{O}/\mathfrak{m}$-espacio vectorial $M/\mathfrak{m}\cdot M$.

10. Sea $C(X)$ el anillo de las funciones reales continuas sobre un espacio topológico métrico (X,d) y sea x un punto de X no aislado. Consideremos el ideal maximal $\mathfrak{m}_x$ de $C(X)$ formado por las funciones que se anulan en x. Sea $\mathcal{O}$ el anillo de gérmenes en x de funciones continuas.

    a) Prueba que $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_x^2$. (Indicación: Si $f \in \mathfrak{m}_x$, entonces $f = \sup(f,0) - \sup(-f,0)$ y $\sqrt{\sup(f,0)},\ \sqrt{\sup(-f,0)} \in \mathfrak{m}_x$).

b) Prueba que el anillo $C(X)$ no es noetheriano.

c) Prueba que $C(X)_x \to \mathcal{O}$, $\frac{f}{g} \mapsto [f]\cdot[g]^{-1}$ es un isomorfismo de anillos.

11. Sea I el ideal de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ formado por las funciones infinitamente diferenciables de $\mathbb{R}^n$ que se anulan en algún entorno del punto $x=0$. Demuestra que el ideal I no es finito generado y concluye que el anillo $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ no es noetheriano cuando $n \geq 1$.

12. Sea $\mathfrak{m}_{or}$ el ideal maximal de $C^\infty(\mathbb{R})$ formado por las funciones que se anulan en el punto 0. Prueba que $\mathcal{O} = C^\infty(\mathbb{R})_{or}$ es el anillo de gérmenes de funciones diferenciables en el punto 0. Sea I el ideal de $\mathcal{O}$ formado por los gérmenes cuya serie de Taylor en 0 es nula. Prueba que $xI = I$ y concluye que el anillo $\mathcal{O}$ no es noetheriano.

13. Sea S un sistema multiplicacativo del anillo A, $i\colon A \to A_S$ el morfismo de localización y $f\colon A \to B$ un morfismo de anillos. Prueba que existe un morfismo (único) $g\colon A_S \to B$ tal que $f = g \circ i$ si y solo si $f(s)$ es invertible para todo $s \in S$.

14. Sean S y S' dos sistemas multiplicativos de un anillo A y denotemos $S\cdot S' = \{ss', \forall s \in S, \forall s' \in S'\}$. Prueba que $A_{S.S'}$ es un anillo isomorfo a $(A_S)_{S'}$.

15. Sea $k \hookrightarrow \Sigma$ una extensión de cuerpos y $\xi_1,\dots,\xi_n \in \Sigma$ elementos k-algebraicamente independientes. Sea $\alpha \in \Sigma$. Prueba que $\xi_1,\dots,\xi_n,\alpha \in \Sigma$ son k-algebraicamente independientes si y solo si α es $k(\xi_1,\dots,\xi_n)$-trascendente.

16. Sean $k \hookrightarrow K$ y $K \hookrightarrow \Sigma$ dos extensiones de tipo finito. Prueba que

$$\operatorname{gr}\operatorname{tr}_k \Sigma = \operatorname{gr}\operatorname{tr}_k K + \operatorname{gr}\operatorname{tr}_K \Sigma.$$

17. Sea $k \hookrightarrow \Sigma$ una extensión de cuerpos de tipo finito. Prueba que todo conjunto de elementos k-algebraicamente independientes de Σ forma parte de una base de trascendencia.

Capítulo 2

Espectro primo de un anillo

2.1. Introducción

Cuando consideramos un sistema de ecuaciones $\mathbb{Q}$-algebraicas

$$\begin{array}{rcl} p_1(x_1,\dots,x_n) & = & 0 \\ \cdots & = & 0 \\ p_r(x_1,\dots,x_n) & = & 0 \end{array}$$

es inmediato que pensemos en el conjunto de todas las soluciones del sistema de ecuaciones. Hemos probado que

$$\left\{ (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Q}^n : \begin{array}{rcl} p_1(\alpha_1,\dots,\alpha_n) & = & 0 \\ \cdots & = & 0 \\ p_r(\alpha_1,\dots,\alpha_n) & = & 0 \end{array} \right\} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}-alg}(\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r),\mathbb{Q})$$

$$\begin{array}{rcl} (\alpha_1,\dots,\alpha_n) & \longmapsto & \phi, \quad \phi(\bar{x}_i):=\alpha_i \\ (\phi(\bar{x}_1),\dots,\phi(\bar{x}_n)) & \longleftarrow & \phi \end{array}$$

Denotemos $A=\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)$, probaremos que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}-alg}(A,\mathbb{Q})=\{\mathfrak{m}\subset A : A/\mathfrak{m}=\mathbb{Q}\},\ \phi\mapsto \mathrm{Ker}\,\phi=(\bar{x}_1-\phi(\bar{x}_1),\dots,\bar{x}_n-\phi(\bar{x}_n)).$$

Podremos pensar en las soluciones sobre $\mathbb{Q}$, pero muchas veces es conveniente pensar en las soluciones en $\mathbb{R}$, en $\mathbb{C}$, etc. Es obvio que si $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{C}^n$ es una solución del sistema de ecuaciones y $\tau\in\mathrm{Aut}_{Anillos}(\mathbb{C})$, entonces $(\tau(\alpha_1,\dots,\tau(\alpha_n))\in\mathbb{C}^n$ es también una solución del sistema de ecuaciones. Consideremos en $\mathbb{C}^n$ la siguiente relación de equivalencia: $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\sim(\beta_1,\dots,\beta_n)$ si y solo si existe $\tau\in\mathrm{Aut}_{Anillos}(\mathbb{C})$ tal que

$(\beta_1,\ldots,\beta_n)=(\tau(\alpha_1,\ldots,\tau(\alpha_n))$. Se cumple el siguiente teorema

$$\begin{array}{ccc} \left\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{C}^n\colon \begin{array}{rcl} p_1(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) & = & 0 \\ \cdots & = & 0 \\ p_r(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) & = & 0\end{array}\right\}\Big/\sim & = & \operatorname{Spec}\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_n]/(p_1,\ldots,p_r) \\ {}[(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)]=[\alpha] & \longmapsto & \mathfrak{p}_\alpha:=\{\overline{p(x)}\colon p(\alpha)=0\}\end{array}$$

En general, si consideramos en vez de $\mathbb{Q}$ un cuerpo k, en vez de $\mathbb{C}$ una k-extensión de cuerpos k' algebraicamente cerrada de grado de trascendencia mayor o igual que n y en vez de $\operatorname{Aut}_{Anillos}(\mathbb{C})$ el grupo $\operatorname{Aut}_{k-alg}(k')$, entonces

$$\begin{array}{ccc} \left\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in k'^n\colon \begin{array}{rcl} p_1(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) & = & 0 \\ \cdots & = & 0 \\ p_r(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) & = & 0\end{array}\right\}\Big/\sim & = & \operatorname{Spec} k[x_1,\ldots,x_n]/(p_1,\ldots,p_r) \\ {}[(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)]=[\alpha] & \longmapsto & \mathfrak{p}_\alpha:=\{\overline{p(x)}\colon p(\alpha)=0\}\end{array}$$

2.2. Espectro k-racional de una k-álgebra

1. Definición: Sea A una k-álgebra. Diremos que un ideal $\mathfrak{m}\subset A$ es racional si $A/\mathfrak{m}\simeq k$ como k-álgebras. Llamaremos espectro k-racional de A y lo denotaremos $\operatorname{Spec}_{rac} A$, al conjunto de los ideales (maximales) racionales de A, es decir,

$$\operatorname{Spec}_{rac} A:=\{\text{Ideales maximales } \mathfrak{m}\subset A \text{ tales que } A/\mathfrak{m}=k\}.$$

2. Proposición: *Sea A una k-álgebra. Entonces,* $\operatorname{Spec}_{rac} A=\operatorname{Hom}_{k-alg}(A,k)$.

Demostración. Las aplicaciones

$$\begin{array}{rrcl} & \operatorname{Hom}_{k-alg}(A,k) & \longleftrightarrow & \operatorname{Spec}_{rac} A \\ & \phi & \longmapsto & \operatorname{Ker}\phi \\ \pi\colon A\to A/\mathfrak{m}=k,\ \pi(a):=\bar a, & \pi & \longleftarrow\!\shortmid & \mathfrak{m}\end{array}$$

son inversas entre sí. □

3. Ejemplo: $\operatorname{Spec}_{rac} k[x_1,\ldots,x_n]=\operatorname{Hom}_{k-alg}(k[x_1,\ldots,x_n],k)=k^n$. Explícitamente, a cada $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in k^n$ le corresponde el ideal racional $(x_1-\alpha_1,\ldots,x_n-\alpha_n)$ de $k[x_1,\ldots,x_n]$.

4. Proposición: *Tenemos la igualdad*

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Spec}_{rac} k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r) & = & \left\{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in k^n : \begin{array}{c} p_1(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0 \\ \cdots \\ p_r(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0 \end{array}\right\} \\
(\overline{x_1-\alpha_1},\dots,\overline{x_n-\alpha_n}) & \longleftarrow\!\shortmid & (\alpha_1,\dots,\alpha_n)
\end{array}$$

Demostración. La aplicación definida es biyectiva como consecuencia de las proposiciones 2.2.2 y 1.4.11

□

5. Cada morfismo de k-álgebras $f: A\to B$ induce la aplicación

$$f^*: \operatorname{Spec}_{rac} B \to \operatorname{Spec}_{rac} A,\ \ f^*(\mathfrak{m}) := f^{-1}(\mathfrak{m}).$$

Tenemos el diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec}_{rac} B \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, equal] & \operatorname{Spec}_{rac} A \arrow[d, equal] & \operatorname{Ker} g \arrow[r, mapsto] & f^{-1}(\operatorname{Ker} g) = \operatorname{Ker}(g\circ f) \\
\operatorname{Hom}_{k-alg}(B,k) \arrow[r, "f^*"] & \operatorname{Hom}_{k-alg}(A,k) & g \arrow[r, mapsto] \arrow[u, mapsto] & f^*(g) := g\circ f \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

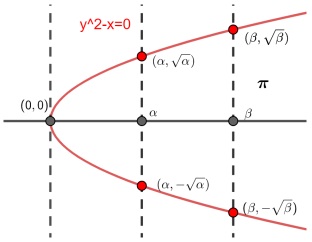
6. Será usual que el ideal racional $(\overline{x_1-\alpha_1},\dots,\overline{x_n-\alpha_n})$ de $k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)$ (con $p_1(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\cdots=p_r(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$) lo denotemos $\mathfrak{m}_\alpha$ (con $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$), luego cuando lo pensemos como elemento del conjunto $\operatorname{Spec}_{rac} k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)$ lo denotaremos por α.

Sea $f: k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)\to k[y_1,\dots,y_m]/(q_1,\dots,q_s)$ un morfismo de k-álgebras, entonces $f(\bar{x}_i)=\overline{f_i(y_1,\dots,y_m)}$, para ciertos polinomios $f_i(y_1,\dots,y_n)$. Sea

$$g: k[y_1,\dots,y_m]/(q_1,\dots,q_s)\to k$$

un morfismo de álgebras y sean $\beta_i = g(\bar{y}_i)$. Entonces $(g\circ f)(\bar{x}_i) = g(\overline{f_i(y_1,\dots,y_m)}) = f_i(\beta_1,\dots,\beta_m)$ y tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec}_{rac} k[y_1,\dots,y_m]/(q_1,\dots,q_s) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, equal] & \operatorname{Spec}_{rac} k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r) \arrow[d, equal] \\
\left\{\text{Sol.} \begin{array}{c} q_1(y_1,\dots,y_m)=0 \\ \cdots \\ q_s(y_1,\dots,y_m)=0 \end{array}\right\} \arrow[r] & \left\{\text{Sol.} \begin{array}{c} p_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \cdots \\ p_r(x_1,\dots,x_n)=0 \end{array}\right\} \\
(\beta_1,\dots,\beta_m) \arrow[r, mapsto] & (f_1(\beta_1,\dots,\beta_m),\dots,f_n(\beta_1,\dots,\beta_m))
\end{tikzcd}$$



7. Ejemplo : Consideremos el morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras

$$\mathbb{R}[x] \hookrightarrow \mathbb{R}[x,y]/(y^2-x),\ p(x) \mapsto \overline{p(x)}.$$

Entonces, $\operatorname{Spec}_{rac} \mathbb{R}[x,y]/(y^2-x) \xrightarrow{\pi} \operatorname{Spec}_{rac} \mathbb{R}[x]$, $(\alpha,\beta) \overset{\pi}{\mapsto} \alpha$ es el morfismo inducido entre los espectros racionales.

8. Ejemplo : Sea X un espacio compacto T_2 y $C(X)$ el anillo de funciones reales continuas definidas sobre X. Dado un punto $p \in X$, el ideal $\mathfrak{m}_p$ de funciones que se anulan en p es un ideal racional, porque $C(X)/\mathfrak{m}_p \simeq \mathbb{R}$, $\bar{f} \mapsto f(p)$. Además, $\mathfrak{m}_p \neq \mathfrak{m}_q$ si $p \neq q$, porque X es un espacio topológico normal y las funciones continuas separan cerrados disjuntos, por el lema de Urysohn.

Dado un ideal maximal $\mathfrak{m} \subset C(X)$, si $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_p$ para todo $p \in X$, entonces para cada $p \in X$ existe una función $f_p \in \mathfrak{m}$ que no se anula en p, luego tampoco en un entorno U_p de p. Como X es compacto, un número finito $U_{p_1},\dots,U_{p_n}$ recubren X. Por tanto, $f := f_{p_1}^2 + \cdots + f_{p_n}^2$ no se anula en ningún punto de X, luego es invertible y $f \in \mathfrak{m}$, contradicción. Hemos probado que todo ideal maximal es racional y que la aplicación

$$X = \operatorname{Spec}_{rac} C(X),\ p \mapsto \mathfrak{m}_p$$

es una biyección.

9. Si A es una k-álgebra, entonces $A = \operatorname{Hom}_{k-alg}(k[x],A)$ y cada $a \in A$ induce una aplicación (que seguimos denotando por a) en los espectros racionales

$$\operatorname{Spec}_{rac} A \xrightarrow{a} \operatorname{Spec}_{rac} k[x] = k,\ \mathfrak{m} \mapsto \bar{a} \in A/\mathfrak{m} = k$$

Si $A = k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)$, $a = \overline{p(x_1,\dots,x_n)}$ y $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_\alpha$ (con $\alpha \in k^n$ tal que $p_1(\alpha) = \cdots = p_r(\alpha) = 0$), entonces $\bar{a} = p(\alpha) \in (k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r))/\mathfrak{m}_\alpha = k$ y tenemos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Spec}_{rac} k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r) & \xrightarrow{\overline{p(x_1,\dots,x_n)}} & k \\ \alpha & \longmapsto & p(\alpha). \end{array}$$

10. Proposición : *Sean A y B dos k-álgebras, entonces*

$$\operatorname{Spec}_{rac}(A \times_k B) = \operatorname{Spec}_{rac} A \coprod \operatorname{Spec}_{rac} B.$$

Demostración. Dado un morfismo de anillos $f: A \times B \to k$ tenemos que $0 = f(0,0) = f((1,0)\cdot(0,1)) = f(1,0)\cdot f(0,1)$, entonces $f(1,0) = 0$ o $f(0,1) = 0$. En el primer caso f se anula sobre $A\times 0$, es decir, factoriza vía el cociente $(A\times B)/(A\times 0)=B$, en el segundo caso f se anula en $0\times B$, es decir, factoriza vía el cociente $(A\times B)/(0\times B)=A$. Luego

$$\begin{aligned}\operatorname{Spec}_{rac}(A\times_k B) &= \operatorname{Hom}_{k-alg}(A\times_k B,k)=\operatorname{Hom}_{k-alg}(A,k)\coprod \operatorname{Hom}_{k-alg}(B,k)\\ &=\operatorname{Spec}_{rac}A\coprod \operatorname{Spec}_{rac}B.\end{aligned}$$

□

11. Proposición: *Sean A y B dos k-álgebras, entonces*

$$\operatorname{Spec}_{rac}(A\otimes_k B)=\operatorname{Spec}_{rac}A\times\operatorname{Spec}_{rac}B.$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned}\operatorname{Spec}_{rac}(A\otimes_k B) &= \operatorname{Hom}_{k-alg}(A\otimes_k B,k)=\operatorname{Hom}_{k-alg}(A,k)\times \operatorname{Hom}_{k-alg}(B,k)\\ &=\operatorname{Spec}_{rac}A\times \operatorname{Spec}_{rac}B.\end{aligned}$$

□

2.3. Espectro primo de un anillo

1. Definición: Se llama espectro primo de un anillo A al conjunto $\operatorname{Spec}A$ de sus ideales primos.

2. Ejemplos: $\operatorname{Spec}\mathbb{R}=\{(0)\}$, $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}=\{(0),(p)$, para todo número primo $p\}$, $\operatorname{Spec}k[x]=\{(0),(p(x)$ para todo polinomio mónico irreducible $p(x)\}$.

3. Notaciones: Un ideal primo $\mathfrak{p}_z\subset A$ lo denotaremos por z cuando lo consideremos como elemento de $\operatorname{Spec}A$.

Llamaremos funciones a los elementos del anillo A y puntos a los elementos de $\operatorname{Spec}A$. Diremos que una función $a\in A$ se anula en un punto $x\in\operatorname{Spec}A$ cuando $a\in\mathfrak{p}_x$, es decir, cuando $0=\bar a\in A/\mathfrak{p}_x$ (suele denotarse $a(x):=\bar a\in A/\mathfrak{p}_x$).

4. Ejercicio: Prueba que una función $f\in A$ es invertible si y sólo si no se anula en ningún punto de $\operatorname{Spec}A$. Prueba que $p(x,y)\in k[x,y]$ se anula en el ideal primo racional $\mathfrak{m}_{\alpha,\beta}=(x-\alpha,y-\beta)\subset k[x,y]$ si y sólo si $p(\alpha,\beta)=0$.

Como $\mathfrak{p}_z$ es un ideal primo se cumple:

1. La función 0 se anula en todos los puntos $z\in\operatorname{Spec}A$.

2. Si dos funciones se anulan en un punto z, su suma también.

3. Si una función se anula en un punto z, sus múltiplos también.

4. Si un producto de funciones se anula en un punto z, algún factor se anula en z.

5. Definición: Sea A un anillo. Si $f \in A$, llamaremos *ceros* de la función f al subconjunto $(f)_0 \subset \operatorname{Spec} A$ formado por todos los puntos donde se anule f. Llamaremos ceros de un ideal $I \subseteq A$ al subconjunto de $\operatorname{Spec} A$ formado por los puntos donde se anulen todas las funciones de I y lo denotaremos $(I)_0$, es decir,

$$(I)_0 = \bigcap_{f \in I} (f)_0 = \left\{ \begin{array}{r} \text{Ideales primos } \mathfrak{p}_x \subset A \\ \text{tales que } I \subseteq \mathfrak{p}_x \end{array} \right\}$$

6. Proposición: *Se cumplen las siguientes igualdades:*

1. $(0)_0 = \operatorname{Spec} A$ *y* $(A)_0 = \emptyset$.

2. $(\sum_{j \in J} I_j)_0 = \bigcap_{j \in J} (I_j)_0$.

3. $(\bigcap_{j=1}^{n} I_j)_0 = \bigcup_{j=1}^{n} (I_j)_0$.

Demostración. Todas las igualdades son de demostración inmediata, salvo quizás la 3. Para ésta, basta probar que $(I_1 \cap I_2)_0 = (I_1)_0 \cup (I_2)_0$. Veámoslo:

Obviamente, $(I_1 \cap I_2)_0 \supseteq (I_1)_0 \cup (I_2)_0$. Veamos la otra inclusión: Sea $x \in (I_1 \cap I_2)_0$. Si $x \notin (I_1)_0$ y $x \notin (I_2)_0$, entonces existe $f_1 \in I_1$ y $f_2 \in I_2$ que no se anulan en x, luego $f_1 \cdot f_2$ no se anula en x. Pero como $f_1 \cdot f_2 \in I_1 \cap I_2$ llegamos a contradicción con que $x \in (I_1 \cap I_2)_0$. Por tanto, $x \in (I_1)_0 \cup (I_2)_0$ y $(I_1 \cap I_2)_0 \subseteq (I_1)_0 \cup (I_2)_0$.

□

7. Ejercicio: Demuestra que $(I_1 \cdot I_2)_0 = (I_1)_0 \cup (I_2)_0$, donde denotamos por $I_1 \cdot I_2 = \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid a_i \in I_1, b_i \in I_2, n \in \mathbb{N}\}$.

8. Definición: Llamamos topología de Zariski de $\operatorname{Spec} A$, a la topología sobre $\operatorname{Spec} A$ cuyos cerrados son los ceros de los ideales de A.

La proposición anterior nos dice que la topología de Zariski es efectivamente una topología.

9. Ejercicio: Determinar los puntos y la topología de $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

Dado un punto $x \in \operatorname{Spec} A$ y un cerrado $C = (I)_0$, si $x \notin C$ existe $f \in I \subseteq A$ que no se anula en x, "las funciones de A separan puntos de cerrados en $\operatorname{Spec} A$".

Dada una inclusión $I_1 \subseteq I_2$ de ideales se tiene que $(I_1)_0 \supseteq (I_2)_0$. Dado un cerrado C se verifica que $C = (I)_0$, donde I es el ideal de todas las funciones que se anulan en C: Obviamente $C \subseteq (I)_0$. Por otra parte $C = (J)_0$ para algún ideal $J \subseteq A$. Tenemos que las funciones de J se anulan en C, luego $J \subseteq I$. Por tanto, $C = (J)_0 \supseteq (I)_0$. Hemos concluido.

Si bien, $C = (I)_0$, donde I es el ideal de todas las funciones que se anulan en C, pueden existir ideales $J \underset{\neq}{\subset} I$ tales que $C = (I)_0 = (J)_0$. Por ejemplo, $(4)_0 = (2)_0 \subset \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

Dado un subconjunto Y de $\operatorname{Spec} A$, denotamos por $\bar{Y}$ el cierre de Y en $\operatorname{Spec} A$.

10. Proposición: *Dado $x \in \operatorname{Spec} A$ su cierre es $\bar{x} = (\mathfrak{p}_x)_0$. En particular, $\operatorname{Spec} A$ es un espacio topológico T_0 (puntos distintos tienen cierres distintos) y un punto x es cerrado si y sólo si $\mathfrak{p}_x$ es un ideal maximal.*

Demostración. El cierre de x, $\bar{x}$, será de la forma $\bar{x} = (I)_0$, para cierto ideal $I \subset A$. Obviamente, como $x \in \bar{x}$, tenemos que $I \subseteq \mathfrak{p}_x$. Por tanto, $(\mathfrak{p}_x)_0 \subseteq (I)_0$. Ahora bien, $(I)_0$ es el menor cerrado que contiene a x y $x \in (\mathfrak{p}_x)_0$, luego $(\mathfrak{p}_x)_0 = (I)_0 = \bar{x}$.

□

11. Ejemplo: Los ideales primos de $k[x]$ son los ideales $(p(x))$, con $p(x)$ primo o irreducible y el ideal (0). Si $k = \mathbb{C}$, los ideales primos de $\mathbb{C}[x]$ son $\mathfrak{m}_\alpha = (x-\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ y (0). Así que los ideales primos maximales de $\mathbb{C}[x]$ se corresponden con los puntos de una recta afín. De aquí que se siga la notación $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x] = \mathbb{A}_1(\mathbb{C})$. En resumen

$$\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x] = \begin{cases} \text{Puntos cerrados: } \alpha \equiv (x-\alpha), \text{ con } \alpha \in \mathbb{C}. \\ \text{Punto "genérico": } g \equiv (0). \end{cases}$$

En general, si k es un cuerpo, diremos que $\operatorname{Spec} k[x]$ es la recta afín sobre k.

Dado un ideal $((x-\alpha_1)^{n_1} \cdots (x-\alpha_r)^{n_r}) \subset \mathbb{C}[x]$, entonces $((x-\alpha_1)^{n_1} \cdots (x-\alpha_r)^{n_r}))_0 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$.Por tanto, los cerrados de la topología de Zariski de $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x]$, a parte del vacío y el total, son los conjuntos finitos de puntos cerrados (de la recta afín).

12. Ejemplo: Sea $X = [0,1] \subset \mathbb{R}$ y $C(X)$ el anillo de funciones reales continuas definidas sobre X. Dado un punto $p \in X$, el ideal $\mathfrak{m}_p$ de funciones que se anulan en p es un ideal maximal (racional), porque $C(X)/\mathfrak{m}_p \simeq \mathbb{R}$, $\bar{f} \mapsto f(p)$.

Veamos el recíproco: dado un ideal maximal $\mathfrak{m} \subset C(X)$, si $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_p$ para todo $p \in X$, entonces para cada $p \in X$ existe una función $f_p \in \mathfrak{m}$ que no se anula en p, luego tampoco en un entorno U_p de p. Como X es compacto, un número finito $U_{p_1}, \dots, U_{p_n}$

recubren X. Por tanto, $f = f_{p_1}^2 + \cdots + f_{p_n}^2$ no se anula en ningún punto de X, luego es invertible y $f \in \mathfrak{m}$, contradicción.

Si denotamos por $\operatorname{Spec}_m A$ el subespacio de $\operatorname{Spec} A$ formado por los ideales primos maximales, la biyección

$$X = \operatorname{Spec}_m C(X),\ p \mapsto \mathfrak{m}_p$$

es un homeomorfismo: Es continua, porque dado un ideal I, denotemos $(I)_0^m = (I)_0 \cap \operatorname{Spec}_m A$. Bien, vía la igualdad anterior, se cumple que $\{x \in X$, tales que $f(x) = 0$, para toda $f \in I\} = (I)_0^m$. La inversa es continua, ya que dado un cerrado C en I, si $I_C := \{f \in C(X) \colon f_{|C} = 0\}$, entonces vía la igualdad anterior $C = (I_C)_0^m$.

13. Definición : Diremos que un espacio topológico es irreducible cuando no pueda descomponerse como unión de dos cerrados estrictamente menores. Llamaremos componentes irreducibles de un espacio topológico a los subespacios irreducibles maximales de X, es decir, los subespacios irreducibles no contenidos estrictamente en otro subespacio irreducible.

El cierre de un subespacio irreducible es irreducible, en particular las componentes irreducibles de un espacio son cerradas. Cada punto $x \in X$ es subespacio irreducible, luego su cierre $\bar{x}$ es un cerrado irreducible de X. Como consecuencia del lema de Zorn, todo irreducible está incluido en alguna componente irreducible. X es unión de sus componentes irreducibles.

14. Proposición : *Cada cerrado irreducible del espectro de un anillo es el cierre de un único punto, llamado punto genérico de tal cerrado. En particular, las componentes irreducibles de* $\operatorname{Spec} A$ *son los cierres de los puntos definidos por los ideales primos minimales de* A.

Demostración. Sea C un cerrado irreducible. Sabemos que $C = (I)_0$, donde I es el ideal de todas las funciones que se anulan en C.

Basta ver que I es primo, porque si $I = \mathfrak{p}_x$ entonces $(I)_0 = \bar{x}$. Si $f \cdot g \in I$, es decir, $f \cdot g$ se anula en C, entonces

$$C = C \cap (fg)_0 = C \cap ((f)_0 \cup (g)_0)) = (C \cap (f)_0) \cup (C \cap (g)_0)$$

luego, o bien f se anula en C, o bien g, porque C es irreducible. Es decir, o bien $f \in I$, o bien $g \in I$.

$C = \bar{x}$ es una componente irreducible si y sólo si no está incluido estrictamente en otro cerrado irreducible $C' = \bar{y}$, es decir, si y sólo si $\mathfrak{p}_y \not\subseteq \mathfrak{p}_x$, es decir, si y sólo si $\mathfrak{p}_x$ es un ideal primo minimal.

□

15. Teorema: *El espectro primo de un anillo es un espacio topológico compacto.*

Demostración. Sea $C_j = (I_j)_0$ una familia arbitraria de cerrados de Spec$A$. Si $\underset{j}{\cap} C_j = \emptyset$ entonces

$$\emptyset = \underset{j}{\cap}(I_j)_0 = (\sum_j I_j)_0$$

Por tanto, $\sum_j I_j = A$. Luego $1 = f_1 + \cdots + f_n$ para ciertas $f_1 \in I_{j_1}, \dots, f_n \in I_{j_n}$. Luego, de nuevo $I_{j_1} + \cdots + I_{j_n} = A$ y

$$(I_{j_1})_0 \cap \cdots \cap (I_{j_n})_0 = \emptyset$$

es decir, $C_{j_1} \cap \cdots \cap C_{j_n} = \emptyset$ y Spec$A$ es compacto.

□

2.3.1. Espectro primo de un anillo noetheriano

16. Definición: Se dice que un espacio topológico es noetheriano si toda cadena descendente de cerrados estabiliza.

17. Proposición: *1. Todo espacio topológico noetheriano es compacto.*

2. Todo subespacio de un espacio topológico noetheriano es noetheriano.

3. Todo espacio topológico noetheriano es unión de un número finito de cerrados irreducibles.

Demostración. Probemos solo 3. Sea X el espacio topológico noetheriano. Supongamos que X no es unión de un número finito de cerrados irreducibles. En particular, X no es irreducible, luego es unión de dos cerrados propios, $X = C_1 \cup C_2$. C_1 y C_2 no pueden ser los dos a la vez unión de un número finito de cerrados irreducibles. Digamos que C_1 no es unión de un número finito de cerrados irreducibles. En particular, C_1 no es un cerrado irreducible, luego es unión de dos cerrados propios $C_1 = C_{11} \cup C_{12}$. C_{11} y C_{12} no pueden ser los dos a la vez unión de un número finito de cerrados irreducibles. Digamos que C_{11} no es unión de un número finito de cerrados irreducibles. En particular, C_{11} no es un cerrado irreducible, luego es unión de dos cerrados propios $C_{11} = C_{111} \cup C_{112}$. Así sucesivamente, vamos construyendo la cadena descendente de inclusiones estrictas

$$C_1 \supset C_{11} \supset C_{111} \supset \cdots$$

lo que contradice la noetherianidad de X. En conclusión, X es unión de un número finito de cerrados irreducibles.

□

18. Proposición: *Si A es un anillo noetheriano, entonces* Spec$A$ *es un espacio topológico noetheriano. En particular,* Spec$A$ *es unión de un número finito de componentes irreducibles y el número de ideales primos minimales de A es finito*

Demostración. Sea $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots \supseteq C_n \supseteq \cdots$ una cadena descendente de cerrados. Sean I_i los ideales de funciones que se anulan en C_i. Luego $(I_i)_0 = C_i$ y tenemos la cadena

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$$

Cadena que estabiliza por ser A noetheriano. Es decir, existe $m \in \mathbb{N}$ de modo que $I_m = I_{m+1} = \cdots$. Luego, $C_m = C_{m+1} = \cdots$.

□

2.3.2. Espectro primo y soluciones de un sistema de ecuaciones algebraicas

19. Teorema: *Consideremos un sistema de ecuaciones k-algebraicas*

$$\begin{array}{rcl} p_1(x_1,\ldots,x_n) & = & 0 \\ \cdots & = & 0 \\ p_r(x_1,\ldots,x_n) & = & 0 \end{array}$$

y sea k' una k-extensión de cuerpos algebraicamente cerrada y de grado de trascendencia mayor o igual que n. Dadas $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n), \beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n) \in k'^n$, diremos que $\alpha \sim \beta$ si existe $\tau \in Aut_{k-alg}k'$, tal que

$$\tau(\alpha) := (\tau(\alpha_1),\ldots,\tau(\alpha_n)) = \beta.$$

Se cumple que

$$\begin{array}{rcl} \{\alpha \in k'^n : p_1(\alpha) = \cdots = p_r(\alpha) = 0\}\big/ \sim & = & \operatorname{Spec} k[x_1,\ldots,x_n]/(p_1,\ldots,p_r) \\ [\alpha] & \longmapsto & \mathfrak{p}_\alpha := \{\bar{p} \in k[x_1,\ldots,x_n]/(p_1,\ldots,p_r) \colon p(\alpha) = 0\} \end{array}$$

Demostración. Demos la asignación inversa.

Dado un ideal primo $\mathfrak{p}_y \subset A$, sea $k(y) := (A/\mathfrak{p}_y)_y$ el cuerpo residual de y. Existe un morfismo $i \colon k(y) \hookrightarrow k'$ porque el cierre algebraico de $k(y)$ es igual al cierre algebraico de un cuerpo de funciones racionales en s variables, con $s = \operatorname{gr}\operatorname{tr}_k k(y) \leq n$ y k' es igual al cierre algebraico de un cuerpo de funciones racionales en $m \geq n$ variables.

Veamos que dado otro morfismo $j \colon k(y) \to k'$ entonces existe $\tau \in Aut_{k-alg}k'$ tal que $i = \tau \circ j$. Pensemos i como una inclusión y sea $z_1,\ldots,z_s \in k'$ una base de k-trascendencia de $k(y)$. Componiendo j con un automorfismo τ' de k' podemos suponer que $z'_l := j(z_l)$ es igual a z_l, para todo $1 \leq l \leq s$. En efecto, sean $z_{s+1},\dots,z_m \in k'$ y $z'_{s+1},\dots,z'_m \in k'$ de modo que $z_1,\dots,z_m$ y $z'_1,\dots,z'_m$ sean bases de k-trascendencia de k'. Sea ahora $\sigma\colon k(z'_1,\dots,z'_m) \to k(z_1,\dots,z_m)$ el morfismo definido por $\sigma(z'_l) = z_l$, para todo l. Por toma de cierres algebraicos, el morfismo σ extiende al automorfismo $\tau'\colon k' \to k'$ buscado. Sea $h\colon k(y)(z_{s+1},\dots,z_m) \to k'$ el morfismo definido por $h = j$ sobre $k(y)$ y $h(z_t) = z_t$, para todo $0 < t \leq m-s$. Hemos obtenido el cierre algebraico de $k(y)(z_{s+1},\dots,z_m)$ vía la inclusión natural en k' y vía h. Por tanto existe un morfismo $\tau\colon k' \to k'$ tal que $\tau \circ h$ es la inclusión natural. En particular, $\tau \circ j$ es el morfismo de inclusión natural i de $k(y)$ en k'.

Denotemos por $\pi\colon A \to k(y)$ el morfismo natural, y sea $f = i \circ \pi\colon A \to k'$. A $\mathfrak{p}_y$ le asignamos $[(f(\bar{x}_1),\dots,f(\bar{x}_m))]$.

Ambas asignaciones son inversas entre sí.

□

2.4. Morfismo inducido en espectros por un morfismo de anillos

Sea $j\colon A \to B$ un morfismo de anillos. Si J es un ideal de B, entonces $j^{-1}(J) := \{a \in A\colon j(a) \in J\}$ es un ideal de A. Es fácil comprobar que si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de B entonces $j^{-1}(\mathfrak{p})$ es un ideal primo de A. Obtenemos así una aplicación natural

$$j^*\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A, \quad j^*(\mathfrak{p}) = j^{-1}(\mathfrak{p})$$

1. Teorema: *La aplicación inducida en los espectros por cualquier morfismo de anillos es continua.*

Demostración. Consideremos los morfismos

$$A \xrightarrow{\ j\ } B$$
$$\operatorname{Spec} A \xleftarrow[j^*]{} \operatorname{Spec} B$$

Sea $(I)_0 \subset \operatorname{Spec} A$ un cerrado. Entonces

$$\begin{aligned} j^{*-1}((I)_0) &= \{x \in \operatorname{Spec} B\colon j^*(x) \in (I)_0\} = \{x \in \operatorname{Spec} B\colon j^{-1}(\mathfrak{p}_x) \supseteq I\} \\ &= \{x \in \operatorname{Spec} B\colon \mathfrak{p}_x \supseteq j(I)\} = ((j(I)))_0 \end{aligned}$$

y concluimos que j^* es continua.

□

2. Ejercicio : Calcula las componentes irreducibles de $\operatorname{Spec} k[x,y]/(xy)$.

3. Ejercicio : Sea $X = [0,1] \subset \mathbb{R}$ y $C(X)$ el anillo de las funciones reales continuas definidas en X. Prueba que la aplicación

$$\operatorname{Hom}_{\text{cont.}}(X,X) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}-\text{alg}}(C(X),C(X)), \qquad \phi \mapsto \phi^* : f \mapsto f \circ \phi$$

es biyectiva (usa el ejemplo 2.3.12 y que todo morfismo $C(X) \to C(X)$ induce un morfismo entre los espectros).

4. Teorema : *Sea I un ideal de A. Consideremos los morfismos naturales*

$$\begin{array}{ccc} A \xrightarrow{\pi} A/I & \qquad & a \longmapsto \bar{a} \\ \operatorname{Spec} A \xleftarrow[\pi^*]{} \operatorname{Spec} A/I & & \end{array}$$

Se verifica que π^* es un homeomorfismo de $\operatorname{Spec} A/I$ *con su imagen, que es el cerrado* $(I)_0$.

Demostración. Los ideales primos de A/I se corresponden con los ideales primos de A que contienen a I. Explícitamente,

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Ideales primos de } A \\ \text{que contienen a } I\end{array}\right\} = \{\text{Ideales primos de } A/I\}$$

$$\mathfrak{p} \longmapsto \pi(\mathfrak{p})$$

$$\pi^{-1}(\mathfrak{p}') \longleftarrow\!\shortmid \mathfrak{p}'$$

que es justamente el morfismo

$$\operatorname{Spec} A \supseteq (I)_0 \overset{\pi^*}{=\!=} \operatorname{Spec} A/I$$

Lo que demuestra la biyección buscada. Sabemos que π^* es continua, para ver que la biyección es un homeomorfismo, nos falta probar que π^* es cerrada. Igualmente, los ideales primos de A/I que contienen a un ideal J, se corresponden con los ideales primos de A que contienen a $\pi^{-1}(J)$. Es decir, $\pi^*((J)_0) = (\pi^{-1}(J))_0$. Por tanto, π^* es cerrada.

□

5. Ejercicio: Sea Y un subespacio cerrado de un espacio topológico X. Prueba que el subconjunto, del anillo de funciones reales continuas $C(X)$ de X, formado por las funciones que se anulan en Y es un ideal, I. Si X es un espacio topológico normal prueba que $C(X)/I \simeq C(Y)$ (recuérdese que el teorema de extensión de Tietze afirma que toda función continua sobre un cerrado Y admite una extensión continua a todo X).

6. Corolario: $\operatorname{Spec}(A\times B) = (\operatorname{Spec} A)\coprod(\operatorname{Spec} B)$.

Demostración. Consideremos en el anillo $A\times B$ los ideales $I = A\times 0$, $J = 0\times B$. Como $I+J = A\times B$ y $I\cap J = 0$, tomando ceros tenemos $(I)_0\cap(J)_0 = \emptyset$ y $(I)_0\cup(J)_0 = \operatorname{Spec}(A\times B)$. Es decir, $\operatorname{Spec}(A\times B) = (I)_0\coprod(J)_0$.

Para concluir basta observar que, de acuerdo con el teorema anterior,

$$(I)_0 = \operatorname{Spec}(A\times B)/I = \operatorname{Spec} B$$
$$(J)_0 = \operatorname{Spec}(A\times B)/J = \operatorname{Spec} A$$

□

Explícitamente, los ideales primos de $A\times B$ son de la forma $\mathfrak{p}\times B$ o $A\times\mathfrak{q}$, donde $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A y $\mathfrak{q}$ es un ideal primo de B.

7. Ejercicio: Sean X e Y espacios topológicos y consideremos el espacio topológico $X\coprod Y$. Demostrar que

$$C(X\coprod Y) = C(X)\times C(Y)$$

Justificar la frase "$A\times B$ es el anillo de funciones de $\operatorname{Spec} A\coprod\operatorname{Spec} B$".

2.5. Localización y espectro primo

Nuestro primer objetivo es mostrar que el proceso algebraico de división se va a corresponder con el proceso topológico de localización.

Dado un morfismo de anillos $j\colon A\to B$, cuando no cause confusión, seguiremos las siguientes notaciones: dado un ideal J de B, escribiremos $j^{-1}(J) = J\cap A$, dado un ideal I de A escribiremos $(j(I)) = j(I)\cdot B = I\cdot B$.

1. Teorema: *Consideremos el morfismo $j\colon A\to A_S$, $a\mapsto \frac{a}{1}$, de localización por S. La aplicación inducida $j^*\colon \operatorname{Spec} A_S\to\operatorname{Spec} A$ establece un homeomorfismo de $\operatorname{Spec} A_S$ con su imagen, que está formada por los puntos de $\operatorname{Spec} A$ donde no se anula ninguna función de S:*

$$\operatorname{Spec} A_S \underset{j^*}{=} \{\textit{ideales primos de } A \textit{ que no cortan a } S\}.$$

Demostración. Las asignaciones

$$\operatorname{Spec} A_S = \{\text{Ideales primos de } A \text{ que no cortan a } S\} \subseteq \operatorname{Spec} A$$

$$\mathfrak{p}' \xmapsto{\quad j^* \quad} \mathfrak{p}' \cap A$$

$$\mathfrak{p} \cdot A_S \longleftarrow\!\!\shortmid \; \mathfrak{p}$$

están bien definidas y son inversas entre sí, sin más que comprobar:

1. Si $\mathfrak{p}'$ es un ideal primo de A_S entonces $\mathfrak{p}' \cap A$ es un ideal primo de A que no corta con S y $(\mathfrak{p}' \cap A) \cdot A_S = \mathfrak{p}'$.

2. Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A que no corta con S entonces $\mathfrak{p} \cdot A_S$ es un ideal primo de A_S y $(\mathfrak{p} \cdot A_S) \cap A = \mathfrak{p}$.

Para ver que esta biyección es un homeomorfismo basta observar que $j^*((\frac{a}{s})_0) = j^*((\frac{a}{1})_0) = (a)_0 \cap \operatorname{Im} j^*$. □

2. Notación: Sea A un anillo. Si $f \in A$, denotaremos A_f la localización de A por el sistema multiplicativo $S = \{1, f, f^2, \dots, f^n, \dots\}$. Si x es un punto de $\operatorname{Spec} A$, denotaremos por A_x la localización de A por el sistema multiplicativo $S = A \setminus \mathfrak{p}_x$.

Dado $f \in A$, denotaremos $U_f = \operatorname{Spec} A \setminus (f)_0$ y diremos que es un abierto básico. Observemos que el conjunto de los abiertos básicos $\{U_f\}_{f \in A}$ es una base de abiertos de la topología de Zariski de $\operatorname{Spec} A$, porque el conjunto de los cerrados básicos $\{(f)_0\}_{f \in A}$ es es una base de cerrados de la topología de Zariski de $\operatorname{Spec} A$.

3. Corolario: *El espectro de A_f es igual a* $\operatorname{Spec} A \setminus (f)_0$*:*

$$\operatorname{Spec} A_f = U_f.$$

Demostración. Por el teorema anterior, $\operatorname{Spec} A_f$ se corresponde con los ideales primos $\mathfrak{p}_x$ de A que no cortan con $S = \{1, f, f^2, \dots, f^n, \dots\}$. Que equivale a decir que $\operatorname{Spec} A_f$ se corresponde con los ideales primos $\mathfrak{p}_x$ de A que no contienen a f, es decir, U_f. □

4. Ejercicio: Sea $C(\mathbb{R}^n)$ el anillo de funciones reales continuas sobre $\mathbb{R}^n$. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$, $C(U)$ el anillo de funciones reales continuas sobre U y S el sistema multiplicativo formado por las funciones que no se anulan en ningún punto de U. Prueba que existe un isomorfismo natural $C(\mathbb{R}^n)_S = C(U)$. (Pista: Sea d la función distancia. Dada $h \in C(U)$, $s(x) = \frac{d(x, U^c)}{1 + h^2(x)}$ no se anula en U, s y $f = h \cdot s$ son restricción de funciones continuas de $\mathbb{R}^n$ y $h = \frac{f}{s}$).

5. Corolario : *Los ideales primos de A_x se corresponden con los ideales primos de A contenidos en $\mathfrak{p}_x$. En particular, A_x tiene un único ideal maximal, que es $\mathfrak{p}_x \cdot A_x$.*

Demostración. $\operatorname{Spec} A_x$ se corresponde con los ideales primos de A que no cortan con $A \backslash \mathfrak{p}_x$. Es decir, con los ideales primos de A contenidos en $\mathfrak{p}_x$. □

6. Definición : Los anillos con un único ideal maximal se les denomina anillos locales.

"Podemos decir que el anillo de funciones que consideramos en $U_f = \operatorname{Spec} A_f$ es A_f. Si S es el sistema multiplicativo de las funciones de A que no se anulan en ningún punto de U_f, el lector puede probar que $A_f = A_S$. Como es de desear, estamos diciendo que las funciones de U_f, son los cocientes a/b de funciones de $\operatorname{Spec} A$, donde b es una función que no se anula en ningún punto de U_f. Dado un punto x, es usual no querer fijar la atención en un entorno dado de x, sino considerar un entorno lo suficientemente pequeño, luego las funciones que no se anulan en x pasan a ser invertibles y consideraremos por tanto el anillo A_x. Así pues, A_x recoge el concepto impreciso de funciones en un entorno suficientemente pequeño de x".

7. Definición : Dado un anillo A, llamaremos radical de A al ideal formado por el conjunto de los elementos nilpotentes de A, es decir, si denotamos por $\operatorname{rad} A$ al radical de A, entonces

$$\operatorname{rad} A = \{a \in A : a^n = 0, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

Dados $a, b \in A$, si $a^n = 0$ y $b^m = 0$, entonces $(a+b)^{n+m} = 0$. Ahora es fácil demostrar que el radical de un anillo es un ideal.

8. Corolario : *El radical de un anillo coincide con la intersección de todos los ideales primos del anillo:*

$$\operatorname{rad} A = \bigcap_{x \in \operatorname{Spec} A} \mathfrak{p}_x.$$

Es decir, una función es nilpotente si y solo si se anula en todo punto del espectro.

Demostración. Si $f \in A$ es nilpotente, i.e., $f^n = 0$ para un $n \in \mathbb{N}$, entonces f ha de pertenecer a todo ideal primo de A. Luego $\operatorname{rad} A \subseteq \bigcap_{x \in \operatorname{Spec} A} \mathfrak{p}_x$.

Sea ahora $f \in \bigcap_{x \in \operatorname{Spec} A} \mathfrak{p}_x$. Por el corolario 2.5.3, $\operatorname{Spec} A_f = \emptyset$. Por tanto, $A_f = 0$, es decir, $\frac{1}{1} = \frac{0}{1}$. Luego existe un $f^n \in \{1, f, f^2, \dots\}$, de modo que $f^n \cdot 1 = 0$. Entonces, f es nilpotente. En conclusión $\operatorname{rad} A \supseteq \bigcap_{x \in \operatorname{Spec} A} \mathfrak{p}_x$ y hemos terminado. □

Observemos que $\operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec}(A/\operatorname{rad} A)$.

9. Definición: Se dice que un anillo A es reducido si $\operatorname{rad} A = 0$.

Dado un anillo A se cumple que $A/\operatorname{rad} A$ es reducido: dado $\bar{a} \in (A/\operatorname{rad} A)$ si $\bar{a}^n = 0$, entonces $a^n \in \operatorname{rad} A$, luego $a \in \operatorname{rad} A$ y $\bar{a} = 0$.

10. Proposición: $\operatorname{Spec} A$ *es irreducible si y solo si* $A/\operatorname{rad} A$ *es un anillo íntegro.*

Demostración. Si $\operatorname{Spec} A$ es irreducible, es el cierre de un punto x, y $\mathfrak{p}_x$ es el único ideal primo minimal de A. Por tanto, $\operatorname{rad} A = \mathfrak{p}_x$ y $A/\operatorname{rad} A$ es un anillo íntegro. Si $A/\operatorname{rad} A$ es íntegro entonces $\operatorname{rad} A = \mathfrak{p}_x$ es un ideal primo y $\operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec}(A/\operatorname{rad} A) = (\mathfrak{p}_x)_0 = \bar{x}$ es irreducible. □

11. Definición: Dado un ideal $I \subseteq A$, llamaremos radical de I, y lo denotaremos $r(I)$, a

$$r(I) = \{a \in A : a^n \in I \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

Observemos que si $\pi\colon A \to A/I$ es el morfismo de paso al cociente, entonces el radical de I es la antimagen por π del radical de A/I. Por tanto, el radical de un ideal es la intersección de los ideales primos que lo contienen. Por tanto, dados dos ideales I, I' de A si $(I)_0 = (I')_0$ entonces $r(I) = r(I')$ y recíprocamente. En conclusión, si denominamos ideales radicales a los ideales que coinciden con su radical tenemos que hay una correspondencia biunívoca entre los ideales radicales de un anillo y los cerrados del espectro primo del anillo.

12. Proposición: *Sea A un anillo noetheriano e $I \underset{\neq}{\subset} A$ un ideal radical. Sean $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ los ideales primos mínimos conteniendo a I (que se corresponden con los ideales primos mínimos de A/I), entonces*

$$I = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n.$$

Demostración. Por ser I radical coincide con la intersección de todos los ideales primos que lo contienen, que coincide con la intersección de los ideales primos mínimos conteniendo a I.

□

2.6. Fórmula de la fibra

Dado un morfismo de anillos $j\colon A \to B$ y un sistema multiplicativo S en A, escribiremos $B_{j(S)} = B_S$. Igualmente, dado un ideal primo $\mathfrak{p}_x$ de A, escribiremos $B_{j(A\setminus \mathfrak{p}_x)} = B_x$.

1. Fórmula de la fibra : *Sea $j\colon A \to B$ un morfismo de anillos y consideremos el morfismo inducido $j^*\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$. Dado un punto $x \in \operatorname{Spec} A$ se verifica*

$$j^{*-1}(x) = \operatorname{Spec}(B_x/\mathfrak{p}_x \cdot B_x).$$

Si $\mathfrak{p}_x$ es un ideal primo minimal se verifica $j^{*-1}(x) = \operatorname{Spec} B_x$.
Si $\mathfrak{p}_x$ es un ideal primo maximal se verifica $j^{*-1}(x) = \operatorname{Spec}(B/\mathfrak{p}_x \cdot B)$.

Demostración.

$$\begin{aligned} j^{*-1}(x) &= \{y \in \operatorname{Spec} B\colon \mathfrak{p}_y \cap A = \mathfrak{p}_x\} \\ &= \{y \in \operatorname{Spec} B\colon \mathfrak{p}_y \cap A \subseteq \mathfrak{p}_x \text{ y } \mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y \cap A\} \qquad (*) \\ &= \{y \in \operatorname{Spec} B\colon (\mathfrak{p}_y \cap A) \cap (A \setminus \mathfrak{p}_x) = \emptyset \text{ y } \mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y \cap A\} \\ &= \{y \in \operatorname{Spec} B\colon \mathfrak{p}_y \cap j((A \setminus \mathfrak{p}_x)) = \emptyset \text{ y } j(\mathfrak{p}_x) \subseteq \mathfrak{p}_y\} \\ &= \{y \in \operatorname{Spec} B_x\colon j(\mathfrak{p}_x) \subseteq \mathfrak{p}_y\} = \operatorname{Spec}(B_x/\mathfrak{p}_x \cdot B_x). \end{aligned}$$

Las dos afirmaciones siguientes de la proposición, se deducen de que en $(*)$ podemos prescindir de una de las dos condiciones, en la primera afirmación de la segunda condición y en la segunda afirmación de la primera condición.

□

Observemos que las fibras pueden ser vacías, pues si un anillo $C = 0$ entonces $\operatorname{Spec} C = \emptyset$.

2. Ejemplo : Calculemos $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x,y]$ usando la fórmula de la fibra. Consideremos el morfismo $i\colon \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x,y], p(x) \mapsto p(x)$ y sea $i^*\colon \operatorname{Spec}\mathbb{C}[x,y] \to \operatorname{Spec}\mathbb{C}[x]$ el morfismo inducido en los espectros. Cada punto de $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x,y]$ está en la fibra de un único punto de $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x]$, así que vamos a calcular tales fibras.

Los ideales primos de $\mathbb{C}[x]$ son el ideal (0) y los ideales maximales $\mathfrak{m}_\alpha = (x-\alpha)$. Según la fórmula de la fibra

$$i^{*-1}(\alpha) = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[x,y]/\mathfrak{m}_\alpha\mathbb{C}[x,y] = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[x,y]/(x-\alpha).$$

Ahora bien, $\mathbb{C}[x,y]/(x-\alpha) \simeq \mathbb{C}[y]$, $x \mapsto \alpha, y \mapsto y$. Luego,

$$i^{*-1}(\alpha) = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[y] = \{(0),(y-\beta)\ \forall \beta \in \mathbb{C}\}$$

que se corresponden con los ideales primos de $\mathbb{C}[x,y]$, $\{(x-\alpha),\ (x-\alpha, y-\beta)\ \forall \beta \in \mathbb{C}\}$.

Solo nos falta calcular la fibra de $(0) = \mathfrak{p}_g$

$$i^{*-1}(g) = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[x,y]_{\mathbb{C}[x]-\setminus(0)} = \operatorname{Spec}\mathbb{C}(x)[y]$$

Los ideales primos no nulos de $\mathbb{C}(x)[y]$ están generados por un polinomio irreducible con coeficientes en $\mathbb{C}(x)$ de grado mayor o igual que 1 en y. Por el lema de Gauss se corresponden con los polinomios $p(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ irreducibles de grado mayor o igual que 1 en y. Por tanto, $i^{*-1}(g)$ está formado por los ideales primos $(p(x,y))$, (0) (donde $p(x,y)$ es un polinomio irreducible de grado mayor o igual que 1 en y)

En resumen, los puntos de $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x,y] \underset{\text{Not}}{=} \mathbb{A}_2(\mathbb{C})$ son

1. Los puntos cerrados (α,β), es decir, los ideales primos $(x-\alpha, y-\beta)$.

2. Los puntos genéricos de las curvas irreducibles $(p(x,y))_0 \equiv p(x,y)=0$, es decir, los ideales primos $(p(x,y))$, $p(x,y)$ irreducible.

3. El punto genérico del plano afín $(0)_0 \equiv \mathbb{A}_2(\mathbb{C})$, es decir, el ideal primo (0).

3. Ejemplo : Calculemos $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x,y]/(q(x,y))$. Consideremos la descomposición en producto de polinomios irreducibles $q(x,y) = q_1(x,y)^{n_1}\cdots q_r(x,y)^{n_r}$, que no difieran en factores constantes. Tenemos que

$$\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x,y]/(q(x,y)) = (q(x,y))_0 = \bigcup_{i=1}^{r}(q_i(x,y))_0$$

que son:

1. Los ideales maximales $(x-\alpha, y-\beta)$ tales que $(q(x,y)) \subseteq (x-\alpha, y-\beta)$. Es decir, con otras notaciones, los puntos (α,β) tales que $q(\alpha,\beta)=0$.

2. Los puntos genéricos de las curvas irreducibles $q_i(x,y)=0$.

4. Proposición : *Sea $f\colon A \hookrightarrow B$ un morfismo inyectivo de anillos. Entonces, la imagen del morfismo $f^*\colon \operatorname{Spec}B \to \operatorname{Spec}A$ es densa.*

Demostración. Sea $x \in \operatorname{Spec}A$ el punto genérico de una componente irreducible de $\operatorname{Spec}A$ (es decir, $\mathfrak{p}_x$ es un ideal primo minimal de A). Por la fórmula de la fibra $f^{*-1}(x) = \operatorname{Spec}B_x \neq \emptyset$, porque $B_x \neq 0$, ya que $1 \neq 0$ en B_x. En conclusión, $x \in \operatorname{Im} f^*$ y $\overline{\operatorname{Im} f^*} = \operatorname{Spec}A$. □

2.7. Apéndice: Funtor aasociado a un sistema de ecuaciones

2.7.1. Categorías

Dar una categoría $\mathscr{C}$ es dar

1. Una familia arbitraria, cuyos elementos llamaremos objetos de $\mathscr{C}$.
2. Unos conjuntos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N)$, para cada par de objetos M,N de $\mathscr{C}$, cuyos elementos f llamaremos morfismos de M en N y denotaremos por el símbolo $f: M \to N$.
3. Una aplicación
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(N,P) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,P), \quad (f,g) \mapsto f \circ g$$
para cada terna M,N,P de objetos de $\mathscr{C}$. Satisfaciéndose
    a) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
    b) Para cada objeto M de $\mathscr{C}$, existe un morfismo $\mathrm{Id}_M : M \to M$ de modo que $f \circ \mathrm{Id}_M = f$ e $\mathrm{Id}_M \circ g = g$ para todo morfismo $f: M \to N$ y $g: N \to M$.

Un morfismo $f: M \to N$ se dice que es un isomorfismo si existe $g: N \to M$ de modo que $f \circ g = \mathrm{Id}_N$ y $g \circ f = \mathrm{Id}_M$.

La categoría $\mathscr{C}_{Conj}$ de conjuntos, es la categoría cuyos objetos son los conjuntos y los morfismos entre los objetos son las aplicaciones de conjuntos.

La categoría de espacios topológicos es la categoría cuyos objetos son los espacios topológicos y los morfismos entre los objetos son los homeomorfismos.

La categoría de las variedades diferenciales es la categoría cuyos objetos son las variedades diferenciales y los morfismos los morfismos de variedades diferenciales.

La categoría de grupos es la categoría cuyos objetos son los grupos y los morfismos los morfismos de grupos.

La categoría de los k-espacios vectoriales es la categoría cuyos objetos son los k-espacios vectoriales y los morfismos las aplicaciones k-lineales.

La categoría $\mathscr{C}_{Mod}$ de A-módulos, es la categoría cuyos objetos son los A-módulos y los morfismos entre los objetos son los morfismos de módulos.

La categoría de los anillos es la categoría cuyos objetos son los anillos y los morfismos son los morfismos de anillos.

Categoría de las k-álgebras: Sea k un cuerpo. La categoría de k-álgebras es la categoría cuyos objetos son las k-álgebras y los morfismos los morfismos de k-álgebras.

2.7.2. Funtores representables

1. Definición: Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ dos categorías. Dar un funtor covariante $F\colon \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{C}'$ es asignar a cada objeto M de $\mathscr{C}$ un objeto $F(M)$ de $\mathscr{C}'$, y cada morfismo $f\colon M \to N$ de $\mathscr{C}$ un morfismo $F(f)\colon F(M) \to F(N)$ de $\mathscr{C}'$, de modo que se verifique que $F(f\circ g) = F(f)\circ F(g)$ y $F(\mathrm{Id}_M) = \mathrm{Id}_{F(M)}$.

Análogamente se definen los funtores contravariantes $F\colon \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{C}'$, que asignan a cada objeto M de $\mathscr{C}$ un objeto $F(M)$ de $\mathscr{C}'$, y a cada morfismo $f\colon M \to N$ de $\mathscr{C}$ un morfismo $F(f)\colon F(N) \to F(M)$ de $\mathscr{C}'$, de modo que verifica $F(f\circ g) = F(g)\circ F(f)$ y $F(\mathrm{Id}_M) = \mathrm{Id}_{F(M)}$.

2. Ejemplo: Sea $\mathscr{C}_{k-vect.}$ la categoría de k-espacios vectoriales. Podemos definir el siguiente funtor contravariante

$$\begin{aligned} \mathscr{C}_{k-vect.} &\rightsquigarrow \mathscr{C}_{k-vect} \\ E &\rightsquigarrow E^* \\ f &\rightsquigarrow f^* \end{aligned}$$

Sea $\mathscr{C}$ una categoría y N un objeto de $\mathscr{C}$. Un morfismo $f\colon M \to M'$ induce la aplicación $f_*\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(N,M) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(N,M')$, $g \mapsto f_*(g) := f\circ g$. Sea $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(N,-)\colon \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{C}_{Conj}$ el funtor covariante de $\mathscr{C}$ en la categoría de los conjuntos definido por:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(N,-)\colon \mathscr{C} &\rightsquigarrow \mathscr{C}_{Conj} \\ M &\rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(N,M) \\ f &\rightsquigarrow f_* \\ (f\circ g) &\rightsquigarrow (f\circ g)_* = f_*\circ g_* \end{aligned}$$

Un morfismo $f\colon M \to M'$ induce la aplicación $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M',N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N)$, $g \mapsto f^*(g) := g\circ f$. Sea $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,N)\colon \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{C}_{Conj}$ el funtor contravariante definido por:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,N)\colon \mathscr{C} &\rightsquigarrow \mathscr{C}_{Conj} \\ M &\rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N) \\ f &\rightsquigarrow f^* \\ (f\circ g) &\rightsquigarrow (f\circ g)^* = g^*\circ f^* \end{aligned}$$

3. Ejemplo: Consideremos un sistema de ecuaciones k-algebraicas

$$\begin{aligned} &p_1(x_1,\dots,x_n) = 0 \\ &\cdots \\ &p_r(x_1,\dots,x_n) = 0 \end{aligned}$$

Sea $\mathscr{C}_{k-alg}$ la categoría de k-álgebras y $\mathscr{C}_{Conj}$ la categoría de conjuntos. Definamos el funtor "espacio de soluciones del sistema de ecuaciones algebraica $p_1 = \cdots = p_r = 0$":

$$\begin{array}{rccl} Esp(p_1 = \cdots = p_r = 0)\colon & \mathscr{C}_{k\text{-}alg} & \rightsquigarrow & \mathscr{C}_{Conj} \\ & A & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} \text{Conjunto de soluciones con valores} \\ \text{en el anillo } A \text{ del sistema} \\ p_1 = \cdots = p_r = 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

Al morfismo de k-álgebras $f: A \to B$, $Esp(p_1 = \cdots = p_r = 0)$ le asigna la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} \text{Conjunto de soluciones con valores} \\ \text{en el anillo } A \text{ del sistema} \\ p_1 = \cdots = p_r = 0 \end{array} \right\} & \to & \left\{ \begin{array}{l} \text{Conjunto de soluciones con valores} \\ \text{en el anillo } B \text{ del sistema} \\ p_1 = \cdots = p_r = 0 \end{array} \right\} \\ (a_1, \ldots, a_n) & \mapsto & (f(a_1), \ldots, f(a_n)) \end{array}$$

Se cumple que $Esp(p_1 = \cdots = p_r = 0) = \mathrm{Hom}_{k\text{-}alg}(k[x_1, \ldots, x_n]/(p_1, \ldots, p_r), -)$:

Recordemos que dado un anillo A y un ideal $I \subset A$ se define el cociente de A por el ideal I, que denotamos por A/I, como sigue

$$A/I = \{\bar{a}, \text{ con } a \in A, \text{ de modo que } \bar{a} = \bar{a}' \text{ si y sólo si } a - a' \in I\}$$

A/I tiene estructura de anillo: $\bar{a} + \bar{a}' := \overline{a + a'}$, $\bar{a} \cdot \bar{a}' := \overline{a \cdot a'}$. El epimorfismo $\pi: A \to A/I$, $\pi(a) = \bar{a}$ es un morfismo de anillos y se cumple la siguiente propiedad universal: Un morfismo de anillos $f: A \to B$ factoriza vía π (es decir, existe un morfismo $\bar{f}: A/I \to B$, tal que $f = \bar{f} \circ \pi$) si y sólo si $I \subseteq \mathrm{Ker} f$ (es decir, $f(I) = 0$). En este caso, $\bar{f}$ es único y está definido por $\bar{f}(\bar{a}) = f(a)$. Es decir,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{Anillos}(A/I, B) & = & \{f \in \mathrm{Hom}_{Anillos}(A, B) \colon f(I) = 0\} \\ h & \longmapsto & h \circ \pi \\ \bar{f} & \longleftarrow & f \end{array}$$

Observemos que $\mathrm{Hom}_{k\text{-}alg}(k[x_1, \ldots, x_n], A) = A^n$, $f \mapsto (f(x_1), \ldots, f(x_n))$. Por tanto,

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_{k\text{-}alg}(k[x_1, \ldots, x_n]/(p_1, \ldots, p_r), A) \\ &\qquad = \{f \in \mathrm{Hom}_{k\text{-}alg}(k[x_1, \ldots, x_n], A) \colon 0 = f(p_i) = p_i(f(x_1), \ldots, f(x_n)) \text{ para todo } i\} \\ &\qquad = \{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n : 0 = p_i(a_1, \ldots, a_n) \text{ para todo } i\} \\ &\qquad = Esp(p_1 = \cdots = p_r = 0)(A) \end{aligned}$$

4. Definición: Sean $F, F' : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{C}'$ dos funtores covariantes (o contravariantes). Dar un morfismo $\theta: F \to F'$, es dar para cada objeto M de $\mathscr{C}$ un morfismo $\theta_M : F(M) \to F'(M)$, de modo que para cada morfismo $f: M \to N$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\theta_M"] & F(N) \arrow[d, "\theta_N"] \\ F'(M) \arrow[r, "F'(f)"] & F'(N) \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Diremos que θ es un isomorfismo si los θ_M son isomorfismos, para todo objeto M de $\mathcal{C}$.

5. Definición: Se dicen que dos categorías $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ son equivalentes (resp. antiequivalentes) si existen dos funtores covariantes (resp. contravariantes) $F\colon \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}'$, $G\colon \mathcal{C}' \rightsquigarrow \mathcal{C}$ de modo que $F\circ G$ y $G\circ F$ son funtores isomorfos al funtor identidad.

6. Definición: Dada una categoría $\mathcal{C}$ definimos la categoría opuesta, $\mathcal{C}^0$, como la categoría cuyos objetos son los de $\mathcal{C}$ y

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^0}(X,Y) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$$

Sigamos la convención de que dado un morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ cuando lo pensemos en $\mathcal{C}^0$ lo escribiremos f^0.

Por definición, entenderemos que $f^0 \circ g^0 = (g\circ f)^0$.

7. Ejemplo: El funtor

$$\begin{aligned} &\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}^0 \\ &M \mapsto M \\ &f \mapsto f^0 \end{aligned}$$

es un funtor contravariante. La categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^0$ son antiequivalentes, por tanto todo concepto dado en $\mathcal{C}$ da el correspondiente concepto "dual" en $\mathcal{C}^0$.

$\mathrm{Hom}(F,F')$ denotará los morfismos de F en F'. Dado un objeto M, denotemos $M^\cdot = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,-)$.

8. Teorema: *Sea $F\colon \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}_{Conj}$ un funtor covariante. Se verifica*

1. $\mathrm{Hom}(M^\cdot, F) = F(M)$.
2. $\mathrm{Hom}(M^\cdot, M'^\cdot) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M', M)$, $f^* \longleftarrow\!\dashv f$.
3. $M^\cdot \simeq M'^\cdot$ *si y sólo si* $M \simeq M'$.

Demostración. 1. Todo morfismo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,-) \xrightarrow{\theta} F$ queda determinado por $\theta_M(\mathrm{Id}_M) = g \in F(M)$: No es más que considerar, dado $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,N)$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,M) \arrow[r, "\theta_M"] \arrow[d, "f_*"] & F(M) \arrow[d, "F(f)"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,N) \arrow[r, "\theta_N"] & F(N) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Id}_M \arrow[r, mapsto, "\theta_M"] \arrow[d, mapsto, "f_*"] & g \arrow[d, mapsto, "F(f)"] \\ f \arrow[r, mapsto, dashed, "\theta_N"] & F(f)(g) \end{tikzcd}$$

2. Es consecuencia inmediata de 1.
3. es consecuencia inmediata de 2.

□

La proposición dual de la anterior es la siguiente.

9. Teorema: *Sea $F\colon \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{C}_{Conj}$ un funtor contravariante y denotemos $M^{\cdot} = \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,M)$. Se verifica*

1. $\operatorname{Hom}(M^{\cdot}, F) = F(M)$.
2. $\operatorname{Hom}(M^{\cdot}, M'^{\cdot}) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(M, M')$, $f_* \longleftarrow\!\shortmid f$.
3. $M^{\cdot} \simeq M'^{\cdot}$ *si y sólo si* $M \simeq M'$.

10. Definición: Si $F \simeq \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,M)$ entonces se dice que F es un funtor (contravariante) representable y que M es el representante de F (el cual es único salvo isomorfismos, por 2.7.9 3.).

11. Ejemplo: En Matemáticas, cuando queremos expresar cuál es la propiedad universal de un objeto M (construido de cierto modo), lo que pretendemos es determinar $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(M,-)$ (ó $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,M)$). Pongamos un ejemplo:

"Propiedad universal de la topología final de una aplicación?. Sea X un espacio topológico, Y un conjunto e $f\colon X \to Y$ una aplicación de conjuntos. Existe una topología en Y de modo que

$$\operatorname{Hom}_{cont}(Y,Z) = \{g \in \operatorname{Aplic}(Y,Z)\colon\, g\circ f \in \operatorname{Hom}_{cont}(Y,Z)\} \qquad (*)$$

para todo espacio topológico Z. En efecto, como puede comprobarse, es la topología de Y, cuyos abiertos son los subconjuntos $U \subset Y$ tales que $f^{-1}(U)$ es un abierto de X. Existe una única topología en Y cumpliendo $(*)$. En efecto, denotemos por Y' al conjunto Y dotado con otra topología cumpliendo $(*)$. Entonces, $\operatorname{Hom}_{cont}(Y,-) = \operatorname{Hom}_{cont}(Y',-)$, $g \mapsto g$ y el morfismo identidad $Y = Y'$ es un homeomorfismo por 2.7.9 3. La topología así definida en Y se denomina la topología final en Y de f.

Y con la topología final cumple $(*)$ y se dice que $(*)$ es la propiedad universal de la topología final en Y de la aplicación f.

12. Ejemplo: La recta real es $\mathbb{R}$, la recta compleja es $\mathbb{C}$. Definamos el funtor sobre la categoría de k-álgebras $Recta^{\cdot}$, como el funtor $Recta^{\cdot}(A) := A$. Observemos que $Recta^{\cdot} = \operatorname{Hom}_{k-alg}(k[x],-)$.

Sea

$$\begin{array}{l} p_1(x_1,\dots,x_n) = 0 \\ \dots \\ p_r(x_1,\dots,x_n) = 0 \end{array}$$

un sistema de ecuaciones algebraicas. Consideremos el funtor "espacio de soluciones de $p_1 = \cdots = p_r = 0$", $Esp(p_1 = \cdots = p_r = 0)$, definido por

$$Esp(p_1 = \cdots = p_r = 0)(A) = \{\text{Soluciones con valores en } A \text{ de } p_1 = \cdots = p_r = 0\}$$

Recordemos que $Esp(p_1 = \cdots = p_r = 0) = \mathrm{Hom}_{k-alg}(k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r), -)$. Se cumple que

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(Esp(p_1 = \cdots = p_r = 0), Recta^{\cdot}) &= \mathrm{Hom}_{k-alg}(k[x], k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r))\\ &= k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)\end{aligned}$$

"$k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)$ es el anillo de todas las funciones universales del conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones algebraicas $p_1 = \cdots = p_r = 0$"

Explícitamente, dado $\overline{p(x_1,\dots x_n)} \in k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)$ define el morfismo

$$\begin{array}{rcl} Esp(p_1 = \cdots = p_r = 0) & \to & Recta^{\cdot} \\ Esp(p_1 = \cdots = p_r = 0)(A) & \to & Recta^{\cdot}(A) = A \\ (a_1,\dots,a_n) & \mapsto & p(a_1,\dots,a_n) \end{array}$$

13. Ejemplo: Sean dos sistemas de ecuaciones algebraicas

$$\left\{\begin{array}{l} p_1(x_1,\dots,x_n) = 0 \\ \cdots \\ p_r(x_1,\dots,x_n) = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} q_1(y_1,\dots,y_m) = 0 \\ \cdots \\ q_s(y_1,\dots,y_m) = 0 \end{array}\right.$$

Se cumple que

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}(Esp(p_1 = \cdots = p_r = 0), Esp(q_1 = \cdots = q_s = 0))\\ &\qquad = \mathrm{Hom}_{k-alg}(k[y_1,\dots,y_m]/(q_1,\dots,q_s), k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r))\end{aligned}$$

Explícitamente, el morfismo de k-algebras

$$f : k[y_1,\dots,y_m]/(q_1,\dots,q_s) \to k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)\ f(\bar{y}_i) = \overline{r_(x_1,\dots,x_n)},$$

define el morfismo

$$\begin{array}{rcl} Esp(p_1 = \cdots = p_r = 0) & \overset{f^*}{\to} & Esp(q_1 = \cdots = q_s = 0) \\ Esp(p_1 = \cdots = p_r = 0)(A) & \to & Esp(q_1 = \cdots = q_s = 0)(A) \\ (a_1,\dots,a_n) & \mapsto & (b_1 = r_1(a_1,\dots,a_n),\dots,b_m = r_m(a_1,\dots,a_n)) \end{array}$$

14. Teorema: *"Dos sistemas de ecuaciones algebraicas (con las mismas variables) tienen el mismo conjunto de soluciones (para todo anillo) si y sólo si los ideales generados por los polinomios de las ecuaciones de cada sistema coinciden" Con mayor precisión, sean*

$$\left\{\begin{array}{l} p_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \cdots \\ p_r(x_1,\dots,x_n)=0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} q_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \cdots \\ q_s(x_1,\dots,x_n)=0 \end{array}\right.$$

dos sistemas de ecuaciones algebraicas. Se cumple que

$$Esp(p_1=\cdots=p_r=0)=Esp(q_1=\cdots=q_s=0) \iff (p_1,\cdots,p_r)=(q_1,\dots,q_s)$$

Demostración. Decir que $Esp(p_1=\cdots=p_r=0)=Esp(q_1=\cdots=q_s=0)$ quiere decir que el morfismo

$$\begin{array}{rcl} Esp(p_1=\cdots=p_r=0) & \to & Esp(q_1=\cdots=q_s=0) \\ Esp(p_1=\cdots=p_r=0)(A) & \to & Esp(q_1=\cdots=q_s=0)(A) \\ (a_1,\dots,a_n) & \mapsto & (a_1,\dots,a_n) \end{array}$$

está bien definido y es un isomorfismo. Es decir, el morfismo

$$k[x_1,\dots,x_n]/(q_1,\dots,q_s)\to k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r),\ \bar{x}_i\mapsto \bar{x}_i,$$

está bien definido y es un isomorfismo. Ahora bien, este morfismo está bien definido si aplica los $\bar{q}_i$ al cero, es decir $(q_1,\dots,q_s)\subseteq(p_1,\dots,p_r)$. El morfismo inverso para que exista ha de estar definido por $k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)\to k[x_1,\dots,x_n]/(q_1,\dots,q_s)$, $\bar{x}_i\mapsto\bar{x}_i$. De nuevo este morfismo está bien definido si y sólo si $(p_1,\dots,p_r)\subseteq(q_1,\dots,q_s)$.

En conclusión,

$$Esp(p_1=\cdots=p_r=0)=Esp(q_1=\cdots=q_s=0) \iff (p_1,\cdots,p_r)=(q_1,\dots,q_s)$$

□

2.7.3. Espacio de un anillo de funciones

Hemos probado que el anillo de funciones universales de $Esp(p_1=\cdots=p_r=0)$ es la k-álgebra $k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)$ y que

$$Esp(p_1=\cdots=p_r=0)=\mathrm{Hom}_{k-alg}(k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r),-).$$

También denotaremos a $Esp(p_1=\cdots=p_r=0)$ por $Esp\,k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)$ (y lo leeremos, espacio de anillo de funciones $k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)$). En general:

15. Definición: Sea A una k-álgebra. Definiremos

$$Esp\, A = \mathrm{Hom}_{k-alg}(A, -)$$

y diremos que $Esp\, A$ es el espacio de anillo de funciones A.

Todo morfismo de k-álgebras $f : A \to B$, define el morfismo $f^* : Esp B \to Esp\, A$, $f^*(g) = g \circ f$.

16. Proposición: $\mathrm{Hom}(Esp\, A, Recta^{\cdot}) = A$.

Demostración. $\mathrm{Hom}(Esp\, A, Recta^{\cdot}) = \mathrm{Hom}_{k-alg}(k[x], A) = A$. Explícitamente, $a \in A$, define el morfismo

$$\begin{array}{rcl} Esp\, A & \to & Recta^{\cdot} \\ Hom_{k-alg}(A,B) = Esp\, A(B) & \to & B = Recta^{\cdot}(B) \\ f & \mapsto & f(a) \end{array}$$

□

17. Notación: Diremos que $x \in Esp\, A(B) = \mathrm{Hom}_{k-alg}(A,B)$ es un punto de $Esp\, A$ (con valores en B). Dado $a \in A$ y $x \in Esp\, A(B)$, denotaremos $a(x) = x(a)$.

18. Proposición: *Una función $a \in A$ es nula si y sólo si $a(x) = 0$ para todo punto de $Esp\, A$.*

Sea $I \subset A$ un ideal. Recordemos la propiedad universal del cociente:

$$\mathrm{Hom}_{Anillos}(A/I, B) = \{f \in \mathrm{Hom}_{Anillos}(A,B), \text{ tales que } f(I) = 0\}$$

19. Proposición: *"$Esp\, A/I$ se identifica con los puntos de $Esp\, A$ donde se anulan todas las funciones del ideal I"*

Demostración. El epimorfismo natural $A \to A/I$ define la inyección $Esp\, A/I \hookrightarrow Esp\, A$. Tenemos que probar que

$$Esp\, A/I(B) = \{x \in Esp\, A(B), \text{ tales que } i(x) = 0, \text{ para todo } i \in I\}$$

que es la propiedad universal del cociente por un ideal recién enunciada.

□

20. Proposición: *"Los puntos de $Esp\, A_S$ se identifican con los puntos de $Esp\, A$ donde todas las $s \in S$ son invertibles".*

Demostración. El morfismo natural de localización $A \to A_S$ induce un morfismo natural $Esp\, A_S \to Esp\, A$. Tenemos que probar que vía este morfismo

$$Esp\, A_S(B) = \{x \in Esp\, A(B) \colon s(x) \text{ es invertible, para todo } s \in S\}$$

que es justamente la propiedad universal de A_S recién enunciada. □

21. Proposición: *Se cumple que* $Esp\, A \times Esp\, B = Esp\,(A \otimes_k B)$.

Demostración. Tenemos que probar, para toda k-álgebra C, que

$$(Esp\, A \times Esp\, B)(C) = Esp\,(A \otimes_k B)(C)$$

lo cual es la propiedad universal del producto tensorial de k-álgebras □

Como

$$\begin{aligned} &Esp(p_1(x) = \cdots = p_r(x) = 0) \times Esp(q_1(y) \\ &\qquad = \cdots = q_s(y) = 0) = Esp(p_1(x) = \cdots = p_r(x) = q_1(y) = \cdots = q_s(y) = 0), \end{aligned}$$

entonces

$$k[x,y]/(p_i(x), q_j(y)) = k[x]/(p_i(x)) \otimes_k k[y]/(q_j(y))$$

Dados dos morfismo de funtores $f\colon F_1 \to F$, $g\colon F_2 \to F$ se define el producto fibrado $F_1 \times_F F_2$, como sigue

$$(F_1 \times_F F_2)(A) := F_1(A) \times_{F(A)} F_2(A) = \{(x_1, x_2) \in F_1(A) \times F_2(A) \text{ tales que } f_A(x_1) = g_A(x_2)\}$$

22. Proposición: *Sean $C \to A$ y $C \to B$ dos morfismos de k-álgebras. Tenemos pues los morfismos $Esp\, A \to Esp\, C$ y $Esp\, B \to Esp\, C$. Se cumple que*

$$Esp\, A \times_{Esp\, C} Esp\, B = Esp\,(A \otimes_C B)$$

Demostración. Tenemos que probar que

$$Esp\, A(D) \times_{Esp\, C(D)} Esp\, B(D) = Esp\,(A \otimes_C B)(D)$$

para toda k-álgebra D. En efecto, tenemos la igualdad

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Hom}_{k-alg}(A \otimes_C B, D) & = & \operatorname{Hom}_{k-alg}(A, D) \times_{\operatorname{Hom}_{k-alg}(C,D)} \operatorname{Hom}_{k-alg}(B, D) \\ f & \longmapsto & (f_1, f_2) \;\; f_1(a) := f(a \otimes 1), f_2(b) := f(1 \otimes b) \\ F & \longleftarrow & (f_1, f_2) \;\; F(a \otimes b) := f_1(a) \cdot f_2(b) \end{array}$$

□

2.8. Cuestionario

1. Sea A un anillo íntegro. Calcula las componentes irreducibles de $\operatorname{Spec} A$.

2.9. Problemas

1. Demuestra que $\mathbb{Q}[x, x_1, \dots, x_n, \dots]/((x-n)x_n)_{\{n\in\mathbb{N}\}}$ es localmente noetheriano pero no es noetheriano.

2. Sean $x_1, \dots, x_n \in \operatorname{Spec} A$ e $I \subset A$ un ideal.

   a) Si $I \subseteq \mathfrak{p}_{x_1} \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_{x_n}$, prueba que $I \subseteq \mathfrak{p}_{x_i}$, para algún i.

   b) Sea $S = A \setminus \cup_i \mathfrak{p}_{x_i}$. Prueba que $\operatorname{Spec} A_S = \cup_i \operatorname{Spec} A_{x_i}$. Por tanto, A_S es un anillo semilocal[1] de ideales maximales $\mathfrak{p}_{x_i} \cdot A_S$ (siempre que $\mathfrak{p}_{x_i}$ no esté incluido en $\mathfrak{p}_{x_j}$, para algún $j \neq i$).

3. Dado un abierto $U \subset \operatorname{Spec} A$, se define A_U como la localización de A por el sistema multiplicativo $S = \{s \in A : s(z) \neq 0, \forall z \in U\}$. Dado $a \in A$, sea $U_a = \operatorname{Spec} A - (a)_0$. Prueba que $A_{U_a} = A_a$.

[1]Un anillo se dice que es semilocal si solo tiene un número finito de ideales maximales.

Capítulo 3

Variedades algebraicas

3.1. Introducción

3.2. Morfismos finitos. Teorema de ascenso

1. Definición: Un morfismo de anillos $f\colon A \to B$ se dice que es finito si B es un A-módulo finito, con la estructura natural de A-módulo que define f en B ($a \cdot b := f(a) \cdot b$). En este caso, también se dice que B es una A-álgebra finita.

2. Proposición: *La composición de morfismos finitos es finito.*

Demostración. Sean $A \overset{\text{finito}}{\longrightarrow} B \overset{\text{finito}}{\longrightarrow} C$. Es decir, $B = Ab_1 + \cdots + Ab_n$ y $C = Bc_1 + \cdots + Bc_m$. Luego,

$$C = (Ab_1 + \cdots + Ab_n)c_1 + \cdots + (Ab_1 + \cdots + Ab_n)c_m = \sum_{i=1,j=1}^{n,m} Ab_i c_j$$

En conclusión, $A \to C$ es un morfismo finito.

□

3. Proposición: *Si $A \to B$ es un morfismo finito y $A \to C$ un morfismo de anillos, entonces $C = A \otimes_A C \to B \otimes_A C$ es un morfismo finito. "Los morfismos finitos son estables por cambio de base".*

Demostración. Inmediato. □

4. Corolario: *Si $A \to B$ es un morfismo finito, entonces $A_S \to B_S$ y $A/I \to B/I \cdot B$ son morfismos finitos*

5. Definición: Sea $A \to B$ un morfismo de anillos. Se dice que $b \in B$ es entero sobre A si verifica una relación del tipo

$$b^n + a_1 b^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \qquad \text{con}\, a_i \in A$$

El teorema de Hamilton-Cayley para los endomorfismos de espacios vectoriales también es cierto para los endomorfismos de módulos. Con precisión, sea $M = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$ un A-módulo finito generado, $f \colon M \to M$, $f(m_i) = \sum\limits_j a_{ij} m_j$ un endomorfismo de A-módulos; si $p_c(x)$ es el polinomio característico de la matriz (a_{ij}), entonces $p_c(f) = 0$. En efecto, consideremos la matriz $B = (x_{ij})$ de coeficientes variables y el polinomio característico $P_c(X)$ de esta matriz. $P_c(X)$ es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Z}[x_{ij}] \subset \mathbb{Q}(x_{ij})$. Por el teorema de Hamilton-Cayley $P_c(B) = 0$. Por tanto, especializando a $x_{ij} = a_{ij}$, tendremos que $p_c(f) = 0$.

6. Proposición: *Sean $f \colon A \to B$ un morfismo de anillos y $b \in B$. Denotemos $A[b] = \{p(b) \in B, \text{para } p(x) \in A[x]\}$. El morfismo $A \to A[b]$ es finito $\Leftrightarrow$ b es entero sobre A.*

Demostración. $\Rightarrow$) Consideremos el endomorfismo de A-módulos

$$\begin{aligned} A[b] &\xrightarrow{\cdot b} A[b] \\ p(b) &\longmapsto p(b) \cdot b \end{aligned}$$

Si (a_{ij}) es una matriz asociada a $\cdot b$ en un sistema generador de $A[b]$, entonces el polinomio característico de (a_{ij}) anula a $\cdot b$, luego anula a b, luego b es entero sobre A.

$\Leftarrow$) Sea $p(x)$ un polinomio mónico de grado n con coeficientes en A que anula a b. Entonces $A[b]$ es un cociente de $A[x]/(p(x))$. Como $A[x]/(p(x))$ es un A-módulo generado por $\bar{1}, \dots, \bar{x}^{n-1}$ se concluye. □

Observación: Para la demostración de $\Rightarrow$) sólo es necesario suponer que $A[b]$ está incluido en una A-álgebra finita.

7. Ejemplo: Si α es una raíz n-ésima de la unidad, entonces $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(\alpha)$ es un morfismo finito.

8. Ejemplo: El morfismo $\operatorname{Spec} k[x,y]/(y^2 - x^2 + x^3) \to \operatorname{Spec} k[x]$ definido por $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha$ es un morfismo finito.

9. Proposición: *Sea $f \colon A \to B$ un morfismo de anillos. El conjunto de elementos de B enteros sobre A forman una A-subálgebra de B.*

Demostración. Sean $b_1, b_2 \in B$ enteros sobre A. Tenemos que $A \to A[b_1]$ es un morfismo finito, y $A[b_1] \to A[b_1, b_2]$ es un morfismo finito porque si b_2 verifica una relación entera con coeficientes en A, en particular la verifica con coeficientes en $A[b_1]$. Por tanto, por la proposición 3.2.2, $A \to A[b_1, b_2]$ es un morfismo finito. Luego, por la observación anterior, todo elemento $p(b_1, b_2) \in A[b_1, b_2] \in B$, con $p(x, y) \in A[x, y]$, es entero sobre A.

□

10. Definición : Diremos que un anillo íntegro A es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones Σ, si todo elemento de Σ entero sobre A pertenece a A. También se dice que A es un anillo normal.

Se dice que un morfismo de anillos $A \to B$ es entero si todo elemento de B es entero sobre A, es decir, si B es unión de A-subálgebras finitas.

Sea $A \to B$ un morfismo inyectivo de anillos. Llamaremos cierre entero de A en B al subanillo de B formado por todos los elementos de B enteros sobre A.

Dejamos que el lector pruebe que el cierre entero de un anillo íntegro en su cuerpo de fracciones es un anillo íntegramente cerrado.

11. Ejercicio : Demostrar que $\mathbb{Z}$ es un anillo íntegramente cerrado en $\mathbb{Q}$.

12. Proposición: *Si $f : A \hookrightarrow B$ es un morfismo finito e inyectivo, entonces la aplicación inducida $f^* : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ es epiyectiva.*

Demostración. Supongamos que f es un morfismo finito. Dado $x \in \operatorname{Spec} A$, el morfismo $A_x \to B_x$ es finito e inyectivo. Por el lema de Nakayama, $\mathfrak{p}_x B_x \neq B_x$, luego $\operatorname{Spec} B_x/\mathfrak{p}_x B_x \neq \emptyset$. Es decir, la fibra de x es no vacía, luego f^* es epiyectivo.

□

13. Definición : Llamaremos dimensión de Krull de un anillo A, al supremo de las longitudes de las cadena de ideales primos de A, o equivalentemente, al supremo de las longitudes de las cadenas de cerrados irreducibles de $\operatorname{Spec} A$. Denotaremos a la dimensión (de Krull) de A por $\dim A$. Llamaremos dimensión de $\operatorname{Spec} A$ a la dimensión de Krull de A.

14. Ejercicio : Demostrar que la dimensión de Krull de $\mathbb{Z}$ y $k[x]$ es uno y la de $\mathbb{C}[x, y]$ dos.

15. Proposición : *Toda k-álgebra finita e íntegra es cuerpo.*

Demostración. Sea A una k-álgebras finita íntegra. Dado $a \in A$ no nula, la homotecia $A \xrightarrow{\cdot a} A, b \mapsto b \cdot a$ es inyectiva, por ser A íntegra. Por tanto, por dimensiones, es isomorfismo. Luego a es invertible y A es cuerpo. □

16. Proposición: *El espectro de una k-álgebra finita es un número finito de puntos cerrados.*

Demostración. Las k-álgebras finitas son anillos noetherianos luego tienen un número finito de ideales primos minimales. Si hacemos cociente por un ideal primo minimal obtenemos una k-álgebra finita íntegra, luego es un cuerpo por la proposición anterior. Por tanto, los ideales primos minimales son maximales y hemos concluido. □

17. Teorema: *Sea $f\colon A \to B$ un morfismo de anillos finito. La aplicación inducida en los espectros $f^*\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ es una aplicación cerrada de fibras finitas de dimensión cero.*

Demostración. Sea $C = (J)_0$ un cerrado de $\operatorname{Spec} B$. Debemos demostrar que $f^*(C)$ es un cerrado de $\operatorname{Spec} A$. Consideremos los diagramas

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A/(J\cap A) \arrow[r] & B/J \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \operatorname{Spec} A & & \operatorname{Spec} B \arrow[ll, "f^*"'] \\ (J\cap A)_0 = \operatorname{Spec} A/(J\cap A) \arrow[u, hook] & & \operatorname{Spec} B/J = C \arrow[ll, "{f^*}_{|C}"] \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Como $A/J\cap A \hookrightarrow B/J$ es un morfismo finito inyectivo, por 3.2.12 ${f^*}_{|C}$ es epiyectiva y $f^*(C) = (J\cap A)_0$.

La fibra de un punto $x \in \operatorname{Spec} A$ es $f^{*-1}(x) = \operatorname{Spec} B_x/\mathfrak{p}_x B_x$. Observemos que si $f^{*-1}(x) \neq \emptyset$ entonces $B_x/\mathfrak{p}_x B_x$ es una $A_x/\mathfrak{p}_x$-álgebra finita. Por la proposición 3.2.16, concluimos que f^* es de fibras de dimensión cero y finitas. □

18. Ejercicio: Prueba que la inclusión natural $k[x] \hookrightarrow k[x,y]/(xy-1)$ no es un morfismo finito.

19. Teorema del ascenso: *Sea $f\colon A \to B$ un morfismo entero. Sean $\mathfrak{p}_x \subset \mathfrak{p}_{x'} \subset A$ y $\mathfrak{p}_y \subset B$ ideales primos, de modo que $f^{-1}(\mathfrak{p}_y) = \mathfrak{p}_x$. Existe un ideal primo $\mathfrak{p}_{y'} \subset B$, de modo que $\mathfrak{p}_y \subset \mathfrak{p}_{y'}$ y $f^{-1}(\mathfrak{p}_{y'}) = \mathfrak{p}_{x'}$.*

Demostración. El morfismo $A/\mathfrak{p}_x \to B/\mathfrak{p}_y$ es entero e inyectivo, luego epiyectivo entre espectros (3.2.12); es decir, $f^*\colon (\mathfrak{p}_y)_0 \to (\mathfrak{p}_x)_0$ es epiyectivo y existe $y' \in (\mathfrak{p}_y)_0$ tal que $f^*(y') = x'$. □

Recordemos que la dimensión de Krull de un anillo A es el supremo de las longitudes de las cadena de ideales primos de A, o equivalentemente el supremo de las longitudes de las cadenas de cerrados irreducibles de $\operatorname{Spec} A$. Se denota $\dim A$ a la dimensión (de Krull) de A.

20. Corolario: *Si $f: A \hookrightarrow B$ es un morfismo finito inyectivo, entonces* $\dim A = \dim B$.

Demostración. Dada una cadena estricta de ideales primos $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$ de B, $f^{-1}(\mathfrak{p}_1) \subset f^{-1}(\mathfrak{p}_2) \subset \cdots \subset f^{-1}(\mathfrak{p}_n)$ es una cadena de ideales primos estricta de A, pues las fibras del morfismo inducido por f entre los espectros son de dimensión cero, por 3.2.17. Por tanto, $\dim B \leq \dim A$.

Sea ahora una cadena estricta de ideales primos $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_n$ de A. Sea $\mathfrak{p}_1$ un ideal primo de B, tal que $f^{-1}(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{q}_1$ (existe por 3.2.12). Por el teorema del ascenso, existe $\mathfrak{p}_2 \supset \mathfrak{p}_1$ tal que $f^{-1}(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{q}_2$. Así sucesivamente, obtendremos una cadena estricta de ideales primos $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$ de B (de antimagen por f, la cadena de A). Por tanto, $\dim A \leq \dim B$, luego $\dim A = \dim B$. □

3.3. Lema de Normalización de Noether. Teorema de los ceros de Hilbert

1. Definición: Diremos que $\operatorname{Spec} A$ es una variedad algebraica afín sobre un cuerpo k, si A es una k-álgebra de tipo finito. Los cerrados de las variedades algebraicas los llamaremos subvariedades algebraicas.

Si A y B son k-álgebras de tipo finito y $f: A \to B$ es un morfismo de k-álgebras, diremos que el morfismo inducido $f^*: \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ es un morfismo de variedades algebraicas.

2. Lema de normalización de Noether: *Sea $A = k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ una k-álgebra de tipo finito. Supongamos que k tiene un número infinito de elementos*[1]*. Existe un morfismo finito e inyectivo*

$$k[x_1, \ldots, x_r] \hookrightarrow A$$

"Toda variedad algebraica afín se proyecta con fibras finitas en un espacio afín".

Demostración. Vamos a hacerlo por inducción sobre n. Para $n = 0$, no hay nada que decir. Supongamos que el teorema es cierto hasta $n-1$.

Si los $\{\xi_i\}$ son algebraicamente independientes entre sí, entonces $k[\xi_1, \ldots, \xi_n] = k[x_1, \ldots, x_n]$. Podemos suponer que existe $p(x_1, \ldots, x_n) \in k[x_1, \ldots, x_n]$, no nulo, tal que $p(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$.

[1]Esta hipótesis no es necesaria, sólo la imponemos para que la demostración del lema sea algo más sencilla.

Escribamos $p(x_1,\dots,x_n)=p_s(x_1,\dots,x_n)+p_{s-1}(x_1,\dots,x_n)+\dots+p_0(x_1,\dots,x_n)$ como suma de polinomios $p_i(x_1,\dots,x_n)$ homogéneos de grado i. Sean $x_i=x'_i+\lambda_i x_n$, entonces

$$\begin{gathered} p(x'_1+\lambda_1 x_n,\dots,x'_{n-1}+\lambda_{n-1}x_n,x_n)=p_s(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},1)x_n^s+ \\ \text{polinomio en } x'_1,\dots,x'_{n-1},x_n \text{ de grado en } x_n \text{ menor que } s \end{gathered}$$

Así pues, si elegimos $\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}\in k$ de modo que $p_s(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},1)\neq 0$, tendremos que ξ_n es entero sobre $k[\xi'_1,\dots,\xi'_{n-1}]$, con $\xi'_i=\xi_i-\lambda_i\xi_n$. Por tanto, la composición

$$k[x_1,\dots,x_r]\underset{\text{Hip.ind.}}{\overset{\text{finito}}{\hookrightarrow}} k[\xi'_1,\dots,\xi'_{n-1}]\overset{\text{finito}}{\hookrightarrow} k[\xi'_1,\dots,\xi'_{n-1},\xi_n]=k[\xi_1,\dots,\xi_{n-1},\xi_n]$$

es un morfismo finito. □

3. Observación: En la demostración hemos probado que si $\xi_1,\dots,\xi_n$ no son algebraicamente independientes, entonces $r<n$.

4. Teorema de los ceros de Hilbert: *Sea A una k-álgebra de tipo finito y $\mathfrak{m}$ un ideal maximal. Entonces $A/\mathfrak{m}$ es una extensión finita de k. En particular, si k es algebraicamente cerrado, entonces $k=A/\mathfrak{m}$: "Todo punto cerrado de una variedad algebraica afín sobre un cuerpo algebraicamente cerrado es racional".*

Demostración. Obviamente $A/\mathfrak{m}$ es una k-álgebra de tipo finito sobre k. Por el lema de normalización de Noether, existe un morfismo finito inyectivo

$$k[x_1,\dots,x_r]\hookrightarrow A/\mathfrak{m}$$

Por tanto, $k[x_1,\dots,x_r]$ ha de tener dimensión cero, luego $r=0$ y concluimos. □

5. Ejercicio: Sean $X=\operatorname{Spec}A$ y $Y=\operatorname{Spec}B$ dos variedades algebraicas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k. Definamos $X\times_k Y:=\operatorname{Spec}A\otimes_k B$. Prueba que los puntos cerrados de $X\times_k Y$ son el producto cartesiano de los puntos cerrados de X y los puntos cerrados de Y.

6. Proposición: *Si $f^*\colon X=\operatorname{Spec}B\to Y=\operatorname{Spec}A$ es un morfismo entre variedades algebraicas afines, entonces la imagen de un punto cerrado es un punto cerrado.*

Demostración. Si x es un punto cerrado de X e y es su imagen por f^*, entonces $A/\mathfrak{p}_y\to B/\mathfrak{m}_x$ es inyectivo. Por el teorema de los ceros de Hilbert, $B/\mathfrak{m}_x$ es una extensión finita de k, por tanto $A/\mathfrak{p}_y$ es una k-álgebra finita e íntegra, luego es un cuerpo; es decir, y es un punto cerrado. □

7. Corolario: *Los puntos cerrados de un abierto de una variedad algebraica son puntos cerrados en la variedad algebraica.*

Demostración. Sea $X = \operatorname{Spec} A$ la variedad algebraica. Todo abierto es unión de abiertos básicos, luego basta probar el enunciado para un abierto básico $U_a \subset X$. Ahora bien, como A es una k-álgebra de tipo finito entonces $A_a = A[\frac{1}{a}]$ es una k-álgebra de tipo finito. Luego $U_a = \operatorname{Spec} A_a$ es una variedad algebraica. Se concluye por la proposición anterior aplicada a la inclusión $U_a \hookrightarrow X$. □

8. Definición: Diremos que $X = \operatorname{Spec} A$ es íntegra si A es un anillo íntegro. Diremos que $X = \operatorname{Spec} A$ es reducida si A es un anillo reducido.

9. Corolario (Forma fuerte de los ceros de Hilbert): *Sea A una k-álgebra de tipo finito. Si $f \in A$ pertenece a todo ideal maximal, entonces es nilpotente. En particular, si $X = \operatorname{Spec} A$ es una variedad algebraica reducida sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, entonces una función es nula si y sólo si se anula en todos los puntos racionales.*

Demostración. Por el corolario anterior, los ideales maximales de A_f, se corresponden con los ideales maximales de A que no contienen a f. Por tanto, si f pertenece a todo ideal maximal, entonces el espectro maximal de A_f es vacío, luego $A_f = 0$ y por tanto f es nilpotente. □

10. Corolario: *Dos subconjuntos cerrados de una variedad algebraica afín son iguales si y sólo si contienen los mismos puntos cerrados.*

Demostración. Una función se anula sobre todos los puntos de un cerrado de una variedad algebraica si y sólo si se anula sobre todos los puntos cerrados del cerrado, por el corolario anterior. Como todo cerrado son los ceros del ideal de todas las funciones que se anulan sobre él, hemos terminado. □

3.4. Teoría de la dimensión en variedades algebraicas

1. Teorema: *La dimensión de Krull de $k[x_1,\dots,x_n]$ es n.*

Demostración. Procedamos por inducción sobre n. El caso $n = 1$ es obvio.

Sea

$$0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m$$

una cadena de ideales primos de $k[x_1,\dots,x_n]$. Sea $p \in \mathfrak{p}_1$, no nulo e irreducible. Como $k[x_1,\dots,x_n]$ es un dominio de factorización única, el ideal (p) es un ideal primo. Si $(p) \neq \mathfrak{p}_1$, lo añadimos a la cadena anterior, con lo que podemos suponer que $(p) = \mathfrak{p}_1$. Por el lema de normalización de Noether y la observación 3.3.3, existe un morfismo finito inyectivo $k[x_1,\dots,x_r] \hookrightarrow k[x_1,\dots,x_n]/(p)$, con $r < n$. Por inducción sobre n, la dimensión de Krull de $k[x_1,\dots,x_r]$ es r, luego las cadenas de ideales primos en $k[x_1,\dots,x_n]/(p)$ son de longitud menor o igual que $n-1$. Haciendo cociente por (p), la cadena anterior define una cadena de ideales primos

$$\bar{0} \subset \bar{\mathfrak{p}}_2 \subset \cdots \subset \bar{\mathfrak{p}}_m$$

luego $m-1 \leq n-1$ y $\dim k[x_1,\dots,x_n] \leq n$. Por otra parte,

$$0 \subset (x_1) \subset (x_1,x_2) \subset \cdots \subset (x_1,\dots,x_n)$$

es una cadena de longitud n, luego $\dim k[x_1,\dots,x_n] \geq n$. En conclusión $k[x_1,\dots,x_n]$ tiene dimensión de Krull n. □

2. Teorema: *Sea A una k-álgebra de tipo finito íntegra. La dimensión de Krull de A coincide con el grado de trascendencia de su cuerpo de fracciones.*

Demostración. Por el lema de normalización de Noether, existe un morfismo finito inyectivo $k[x_1,\dots,x_n] \hookrightarrow A$, que induce un morfismo finito entre sus cuerpos de fracciones (pruébese)

$$k(x_1,\dots,x_n) \hookrightarrow \Sigma$$

Luego

$$\dim A \overset{3.2.20}{=} \dim k[x_1,\dots,x_n] = n = \operatorname{gr}\operatorname{tr} k(x_1,\dots,x_n) = \operatorname{gr}\operatorname{tr}\Sigma.$$

□

Observemos que $\dim A = \dim A_{\text{red}}$. Por tanto, la dimensión de una variedad irreducible $\operatorname{Spec} A$ coincide con la dimensión de $\operatorname{Spec} A_{\text{red}}$, que es una variedad algebraica íntegra. En general, toda variedad algebraica es unión de variedades algebraicas irreducibles y la dimensión de la variedad es el máximo de las dimensiones de sus componentes irreducibles.

Observemos que $\dim A = \dim A_{\text{red}}$. Por tanto, la dimensión de una variedad irreducible $\operatorname{Spec} A$ coincide con la dimensión de $\operatorname{Spec} A_{\text{red}}$, que es una variedad algebraica íntegra. En general, toda variedad algebraica es unión de variedades algebraicas irreducibles y la dimensión de la variedad es el máximo de las dimensiones de sus componentes irreducibles.

3. Ejercicio : Sean $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$ y $X \times_k Y := \operatorname{Spec} A \otimes_k B$ variedades algebraicas. Demostrar que

$$\dim(X \times_k Y) = \dim X + \dim Y$$

4. Ejercicio : Sea $f: X \to Y$ un morfismo entre variedades algebraicas irreducibles. Sea $C \subset X$ un cerrado. Demostrar que

$$\dim C \geq \dim \overline{f(C)}$$

5. Teorema del ideal principal de Krull : *Sea* $X = \operatorname{Spec} A$ *una variedad algebraica íntegra. Sea* $f \in A$*, no nula ni invertible. Entonces*

$$\dim(f)_0 = \dim X - 1$$

Es más, todas las componentes irreducibles de $(f)_0$ *son de dimensión* $\dim X - 1$.

Demostración. Si $X = \operatorname{Spec} k[x_1, \dots, x_n]$ y descomponemos $f = p_1 \cdot \ldots \cdot p_s$ en producto de irreducibles, tenemos que $(f)_0 = \cup (p_i)_0$. Basta probar que $\dim(p_i)_0 = n-1$. Ahora bien, el grado de trascendencia del cuerpo de funciones de $k[x_1, \dots, x_n]/(p_i)$ es $n-1$, luego $\dim(p_i)_0 = n-1$.

Escribamos $(f)_0 = C_1 \cup \cdots \cup C_s$ como unión de componentes irreducibles. Sea $y \in C_1 - (C_2 \cup \cdots \cup C_s)$ un punto cerrado. Sea $U_a = \operatorname{Spec} A_a$ un abierto básico que contenga a y disjunto con los C_i, para $i > 1$. Por 3.4.2, $\dim X = \dim U_a$ y $\dim C_1 = \dim C_1 \cap U_a$. Ahora bien, $C_1 \cap U_a$ coincide con los ceros de f en U_a. En conclusión, sustituyendo X por U_a, podemos suponer que $(f)_0 = C_1$.

Por el lema de normalización de Noether sabemos que existe un morfismo finito $k[x_1, \dots, x_n] \hookrightarrow A$. La inclusión $i: k[x_1, \dots, x_n][f] \hookrightarrow A$ es un morfismo finito inyectivo. Además, $i^{*-1}((f)_0) = (f)_0$, por tanto la dimensión de $(f)_0$ en $\operatorname{Spec} k[x_1, \dots, x_n][f]$ es la misma que la de $(f)_0$ en $\operatorname{Spec} A$. Por tanto, podemos suponer que $A = k[x_1, \dots, x_n][f]$.

Sea $p(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ un polinomio irreducible tal que $p(x_1, \dots, x_n, f) = 0$. El epimorfismo

$$k[x_1, \dots, x_{n+1}]/(p(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})) \to k[x_1, \dots, x_n][f], \ \bar{x}_{n+1} \mapsto f$$

es un isomorfismo, porque $k[x_1, \dots, x_{n+1}]/(p(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}))$ es un anillo de dimensión n, íntegro y si hubiese núcleo la dimensión de $k[x_1, \dots, x_n][f]$ sería menor que n.

En conclusión $A = k[x_1, \dots, x_{n+1}]/(p(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}))$ y $f = x_{n+1}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \dim(f)_0 &= \dim A/(f) = \dim k[x_1, \dots, x_{n+1}]/(p(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}), x_{n+1}) \\ &= \dim k[x_1, \dots, x_n]/(p(x_1, \dots, x_n, 0)) = n-1 \end{aligned}$$

□

6. Definición : Una cadena de cerrados irreducibles diremos que es maximal si no está incluida en ninguna otra mayor.

7. Corolario : *Todas las cadenas maximales de cerrados irreducibles de una variedad algebraica irreducible tienen la misma longitud, que es la dimensión de Krull de la variedad.*

Demostración. Sea $X = \operatorname{Spec} A$ la variedad algebraica irreducible. Como $\operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec} A_{\text{red}}$, podemos suponer que la variedad algebraica es íntegra. Demostraremos el corolario por inducción sobre la dimensión de Krull.

Sea $X \supset X_1 \supset \cdots \supset X_m$ una cadena de cerrados irreducibles maximal. Sea $f \in A$ una función no nula que se anule en X_1. Si $(f)_0 = Y_1 \cup \cdots \cup Y_r$ es la descomposición de $(f)_0$ en cerrados irreducibles, X_1 es una de las componentes de la descomposición. Por el teorema anterior $\dim X_1 = \dim X - 1$, luego por inducción sobre la dimensión $m-1 = \dim X_1 = \dim X - 1$, y por tanto $m = \dim X$. □

8. Definición : Se dice que una variedad algebraica es catenaria si todas las cadenas maximales de cerrados irreducibles con extremos cualesquiera prefijados tienen la misma longitud.

9. Corolario : *Las variedades algebraicas son catenarias.*

Demostración. Sean $Y \supset Y'$ cerrados irreducibles de una variedad algebraica X. Toda cadena maximal de extremos Y e Y' induce, adjuntando una cadena maximal de Y', una cadena maximal de Y, luego tiene longitud $\dim Y - \dim Y'$, por el corolario anterior. □

10. Proposición : *Si* $X = \operatorname{Spec} A$ *es una variedad algebraica irreducible y* $x \in X$ *un punto cerrado, entonces* $\dim X = \dim A_x$.

Demostración. La dimensión de Krull de A_x coincide con la máxima longitud de las cadenas de cerrados irreducibles de X que pasan por x. Ahora bien, todas las cadenas maximales de cerrados irreducibles tienen longitud $\dim X$. □

11. Proposición : *Sea* $X = \operatorname{Spec} A$ *una variedad algebraica irreducible de dimensión* n *e* $Y \subset X$ *una subvariedad algebraica irreducible de dimensión* m. *El número mínimo* r *para el cual existen* r *funciones* $f_1, \dots f_r$ *de* X *tales que una de las componentes irreducibles de* $(f_1, \dots, f_r)_0$ *sea* Y *es* $r = n - m$ *(puede imponerse además que todas las componentes sean de dimensión* m*).*

Demostración. Es fácil probar, aplicando recurrentemente el teorema del ideal principal de Krull, que todas las componentes irreducibles de $(f_1,\dots,f_r)_0$ tienen dimensión mayor o igual que $n-r$. Por tanto, tenemos que probar sólo la existencia de tales funciones para $r = n-m$.

Sea f_1 una función que se anule en todo Y y no en X. Escribamos $(f_1)_0 = \cup_i C_i$, donde C_i son cerrados irreducibles de dimensión $n-1$. Sea f_2 una función que se anule en todo Y y no se anule en todo C_i, para cada i. Existe tal función: sea g_i que se anule en Y y en todos los C_j para $j \neq i$, y no se anule en todo C_i, entonces $f_2 = \sum_i g_i$. Tenemos que $(f_1, f_2)_0$ es unión de cerrados irreducibles de dimensión $n-2$ y $(f_1, f_2)_0$ contiene a Y. Siguiendo de este modo obtenemos las funciones $f_1,\dots,f_r$ requeridas.

□

12. Corolario: *Sea X una variedad algebraica irreducible de dimensión n y $x \in X$ un punto cerrado. El número mínimo de funciones $f_1,\dots,f_r$ tales que $(f_1,\dots,f_r)_0 \cap U = \{x\}$, en algún entorno abierto U de x, es $r = n$.*

13. Ejercicio: Sean Y, Y' subvariedades irreducibles de $\mathbb{A}^n$. Llamemos codimensión de Y en $\mathbb{A}^n$, que denotaremos $\operatorname{codim} Y$, a $n - \dim Y$. Supongamos que $Y \cap Y' \neq 0$. Demuéstrese que

$$\operatorname{codim} Y + \operatorname{codim} Y' \geq \operatorname{codim}(Y \cap Y')$$

14. Ejercicio: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo entre variedades algebraicas irreducibles. Sea $y \in f(X)$ un punto cerrado. Demuéstrese que

$$\dim f^{-1}(y) \geq \dim X - \dim \overline{f(X)}$$

3.5. Problemas

1. Sea X una variedad algebraica afín íntegra. Si dos morfismos de X en otra variedad algebraica afín coinciden en un abierto no vacío de X, prueba que coinciden en X.

2. Sea $k \hookrightarrow K$ una extensión finita de cuerpos y $X = \operatorname{Spec} A$ una k-variedad algebraica. Prueba que el morfismo natural $X_K = \operatorname{Spec} A \otimes_k K \to X = \operatorname{Spec} A$ de cambio de base es epiyectivo y cerrado.

3. Sea A un anillo íntegro y $a \in A$ no invertible, ni nula. Prueba que el morfismo de localización $A \to A_a$ no es finito.

4. Sea $\pi\colon X = \operatorname{Spec} A \to \mathbb{A}^1 = \operatorname{Spec} k[x]$ un morfismo finito y supongamos que X es una variedad algebraica íntegra (de dimensión 1). Prueba que el número de puntos (contando multiplicidades) de las fibras de π es constante.

5. Sea I un ideal de un anillo noetheriano. Prueba que $I = r(I)$ si y sólo si I es intersección de un número finito de ideales primos.

6. Calcula los ideales maximales de $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ y $\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]/(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)$.

7. Prueba que si X e Y son variedades algebraicas íntegras sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado, entonces $X\times_k Y$ es íntegra. (Indicación: Usar el teorema de los ceros de Hilbert).

8. Sea $X = \operatorname{Spec} A$ una variedad íntegra sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado. Prueba que para toda extensión $k \to K$, la variedad $X_K = \operatorname{Spec} A\otimes_k K$ es íntegra. (Póngase K unión de álgebras finito generadas).

9. Sea $\bar{k}$ el cierre algebraico de k. Prueba que dos ideales primos $\mathfrak{p} = (f_i)_{i\in I}$, $\mathfrak{q} = (g_j)_{j\in J}$ de $k[x_1,\dots,x_n]$ son iguales si y sólo si las soluciones en $\bar{k}$ de los dos sistemas de ecuaciones $\{f_i = 0\}$, $\{g_j = 0\}$ son las mismas.

10. Sean X, Y variedades algebraicas íntegras sobre un cuerpo k y sean Σ_X, Σ_Y sus respectivos cuerpos de funciones racionales. Si $\phi\colon Y \to X$ es un morfismo que transforma el punto genérico de Y en el punto genérico de X (lo que equivale a que tenga imagen densa), induce un morfismo de k-álgebras $\Sigma_X \to \Sigma_Y$. Diremos que ϕ es un morfismo de *grado* n cuando Σ_Y sea una extensión finita de grado n de Σ_X. Los morfismos de grado 1 se llaman morfismos <u>birracionales</u>. Diremos que X e Y son <u>birracionalmente equivalentes</u> si sus cuerpos de funciones racionales son extensiones de k isomorfas: $\Sigma_X \simeq \Sigma_Y$. Las variedades algebraicas birracionalmente equivalentes al espacio afín se llaman <u>racionales</u>. Es decir, una variedad algebraica sobre k es racional si su cuerpo de funciones racionales es isomorfo a un cuerpo de fracciones racionales $k(x_1,\dots,x_n)$ con coeficientes en k.

11. Sea C la cúbica plana $y^2 = x^2 + x^3$. El haz de rectas $y = tx$ define un morfismo birracional $\mathbb{A}^1 \to C$, $x = t^2-1$, $y = t^3 - t$. Calcula el área del "ojo del lazo" definido por la curva $y^2 = x^2 + x^3$.

12. Sea C la cúbica plana $y^2 = x^3$. El haz de rectas $y = tx$ define un morfismo birracional $\mathbb{A}^1 \to C$, $x = t^2$, $y = t^3$.

Solución de los problemas del curso

Solución de los problemas del capítulo primero

P1. Supongamos $\operatorname{Ker} f \neq 0$. Entonces $\operatorname{Ker} f \underset{\neq}{\subset} \operatorname{Ker} f^2$: sea $m \in \operatorname{Ker} f$ no nulo y $m' \in M$, tal que $f(m') = m$, entonces $m' \in \operatorname{Ker} f^2$ y $m' \notin \operatorname{Ker} f$. Igualmente, $\operatorname{Ker} f^2 \underset{\neq}{\subset} \operatorname{Ker} f^4$ y tenemos la cadena de inclusiones estrictas

$$\operatorname{Ker} f \underset{\neq}{\subset} \operatorname{Ker} f^2 \underset{\neq}{\subset} \cdots \underset{\neq}{\subset} \operatorname{Ker} f^{2^n} \underset{\neq}{\subset} \cdots$$

Lo cual contradice la noetherianidad de M.

P2. La aplicación $(a_1, \dots, a_n, \dots) \mapsto (a_2, \dots, a_n, \dots)$.

P3. Si $N+N_0$ es noetheriano, entonces los submódulos suyos N, N_0 son noetherianos. Si N y N_0 son noetherianos entonces $N \oplus N_0$ es noetheriano y como el morfismo $N \oplus N_0 \to N+N_0$, $(n.n_0) \mapsto n+n_0$ es epiyectivo, entonces $N+N-0$ es noetheriano.

P4. Si M es noetheriano, entonces los cocientes M/N y M/N_0 son noetherianos. Si M/N y M/N_0, entonces M es noetheriano porque el morfismo $M \to M/N \oplus M/N_0$, $m \mapsto (\bar{m}, \bar{m})$ es inyectivo

P5. Escribamos $N = \langle n_1, \dots, n_r \rangle$. El morfismo de A-módulos

$$\operatorname{Hom}_A(N, M) \to M \oplus \overset{r}{\cdots} \oplus M,\ f \mapsto (f(n_1), \dots, f(n_r))$$

es inyectivo. Como M es noetheriano entonces $M \oplus \overset{r}{\cdots} \oplus M$ es notehriano, luego $\operatorname{Hom}_A(N, M)$ es noetheriano.

P6. Escribamos $M = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$. El morfismo de A-módulos

$$A/I \to M \oplus \overset{r}{\cdots} \oplus M,\ \bar{a} \mapsto (am_1, \dots, am_r)$$

es inyectivo. Luego, A/I es un A-módulo notheriano, luego es un A/I-módulo noetheriano, es decir, A/I es un anillo noetheriano.

P7. Escribamos $\mathrm{rad} A = (a_1, \dots, a_r)$ y sean n_i tales que $a_i^{n_i} = 0$. Sea $n = n_1 + \cdot + n_r$, entonces

$$\mathrm{rad}(A)^n = (a_1^{\beta_1} \cdots a_r^{\beta_r})_{\beta_1 + \cdots + \beta_r = n} = (0).$$

P8. Sea $I_n = \{(a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0, \dots) \subset \prod^{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \colon \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}\}$. Tenemos la cadenas de inlcusiones estrictas de ideales

$$I_1 \underset{\neq}{\subset} I_2 \underset{\neq}{\subset} \cdots \underset{\neq}{\subset} I_n \underset{\neq}{\subset} \cdots$$

que muestra que $\prod^{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ no es un anillo noetheriano.

P9. Supongamos que $\mathfrak{m} \cdot M = M$. Escribamos $M = \langle n_1, \dots, n_r \rangle$. Podemos suponer que ninguno de los n_i es combinación lineal de los demás, porque en tal caso quitaríamos tal n_i. Si $r > 0$, $n_1 \in \mathfrak{m} \cdot M$, luego $n_1 = \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot n_i$, con $a_i \in \mathfrak{m}$. Entonces, $(1 - a_1) \cdot n_1 = \sum_{i=2}^{r} a_i \cdot n_i$ y como $1 - a_1 \in \mathcal{O}$ es invertible ya que no pertenece al maximal, tenemos que $n_1 = \sum_{i=2}^{r} \frac{a_i}{1 - a_1} \cdot n_i$ y hemos llegado a contradicción. Luego $r = 0$ y $M = 0$.

Supongamos que $\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_n$ generan el $\mathcal{O}/\mathfrak{m}$-espacio vectorial $M/\mathfrak{m} \cdot M$. Sea $\bar{M} = M/\langle m_1, \dots, m_n \rangle$, entonces

$$\bar{M}/\mathfrak{m} \cdot \bar{M} = M \Big/ (\mathfrak{m} \cdot M + \langle m_1, \dots, m_n \rangle) = (M/\mathfrak{m} \cdot M) \Big/ \langle \bar{m}_1, \dots, \bar{m}_n \rangle = 0.$$

Luego, $\bar{M} = \mathfrak{m} \cdot \bar{M}$, $\bar{M} = 0$ y $M = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$.

P10. a) $f = \sup(f, 0) - sup(-f, 0) = \sqrt{\sup(f, 0)}^2 - \sqrt{sup(-f, 0)}^2 \in \mathfrak{m}_x^2$.

b) El ideal $\mathfrak{m}_x \cdot C(X)_x$ de $C(X)_x$ es no nulo, porque $h(y) := d(y, x) \in \mathfrak{m}_x$ no es cero en ningún entorno de x, luego si $g \in C(X)$ no se anula en x entonces no se anula en ningún punto de un entorno V de x, luego $g \cdot h$ no es cero en V, luego no es la función cero. Por el lema de Nakayama, $\mathfrak{m}_x \cdot C(X)_x$ no es un ideal finito generado y $C(X)_x$ no es un anillo noetheriano. Por tanto, $C(X)$ no es un anillo noetheriano.

c) Es inyectivo: si $[f] \cdot [g]^{-1} = 0$ entonces f es cero en una bola

$$B_\delta := \{y \in X : d(y, x) < \delta\} \underset{\neq}{X}.$$

Sea $h(y) := 1 - \frac{d(y,B_{\delta/2})}{d(y,B_\delta^c)+d(y,B_{\delta/2})}$, entonces $f\cdot h = 0$ y $\frac{f}{g} = 0$. Es epiyectivo: sea f' una función definida en un entorno U de x y $B_\delta \subset U$, entonces la función

$$f(x) := \begin{cases} f(x)\cdot h(x), \text{ si } x \in B_\delta \\ 0, \text{ si } x \notin B_\delta \end{cases}$$

es continua en X y $[f'] = [f]$.

P11. Supongamos que $I = (f_1,\dots,f_n)$. Sea V_i el conjunto de puntos donde se anula f_i y B una bola centrada en 0, tal que $B \subset \cap_i V_i$. Entonces, toda $f \in I$ se anula en B, lo cual es falso. Por lo tanto, I no es finito generado.

P12. El morfismo $C^\infty(\mathbb{R})_{or} \to \mathcal{O}$, $\frac{f}{g} \mapsto [f]\cdot[g]^{-1}$ es un morfismo de anillos bien definido.

Es epiyectivo: Dada una función diferenciable f' en un entorno abierto U de 0, $B_r \subset U$ una bola abierta de radio r centrada en 0 y h una función diferenciable en $\mathbb{R}^n$ que sea 1 sobre $B_{r/2}$ y nula en B_r^c. Entonces, la función diferenciable f en X, definida por $f_{|U} = f'\cdot h_{|U}$ y $f_{|X-U} = 0$ cumple que $\frac{f}{1} \mapsto [f] = [f']$.

Es inyectivo: Si $[f]\cdot[g]^{-1} = 0$, entonces f se anula en un entorno V del cero. Sea h una función diferenciable en X que sea igual a 1 en un entorno $W \subset V$ de 0 y nula en V^c. Entonces, $f\cdot h = 0$ y $\frac{f}{g} = 0$.

P13. Si existe un morfismo g, éste ha de cumplir que $g(\frac{a}{s}) = g(\frac{a}{1})\cdot g(\frac{1}{s}) = f(a)\cdot g(\frac{s}{1}^{-1}) = f(a)\cdot f(s)^{-1}$ (luego $f(s)$ es invertible para todo $s \in S$) y el morfismo así definido (cuando $f(s)$ es invertible para todo $s \in S$) está bien definido y cumple lo requerido.

P14. Los morfismos $A_{SS'} \to (A_S)_{S'}$, $\frac{a}{ss'} \mapsto \frac{\frac{a}{s}}{s'}$ y $(A_S)_{S'} \to A_{SS'}$, $\frac{\frac{a}{s}}{s'} \mapsto \frac{a}{ss'}$ están bien definido y son inversos entre sí.

P15. Supongamos que $\xi_1,\dots,\xi_n,\alpha$ no son k-algebraicamente independientes. Entonces existe un polinomio $p(x_1,\dots,x_n,y)$ no nulo con coeficientes en k, tal que $p(\xi_1,\dots,\xi_n,\alpha) = 0$. Con las notaciones obvias escribamos $p(x_1,\dots,x_n,y) = p(x,y) = \sum_n p_n(x)\cdot y^n$ (algún $p_n(x)$ es no nulo). Entonces, $p(\xi,y) \in k(\xi_1,\dots,\xi_n)[y]$ es no nulo (porque algún $p_n(\xi) \neq 0$) y cumple que $p(\xi,\alpha) = 0$, luego α es $k(\xi_1,\dots,\xi_n)$-algebraico.

Supongamos que α es $k(\xi_1,\dots,\xi_n)$-algebraico, entonces existe un polinomio $p(y) \in k(\xi_1,\dots,\xi_n)[y]$ no nulo tal que $p(\alpha) = 0$. Con las notaciones obvias escribamos $p(y) = \sum_n \frac{p_n(\xi)}{q_n(\xi)} \dot{y}^n$. Observemos que $q(y) := \prod_n q_n(\xi)\cdot p(y) \in k[\xi_1,\dots,\xi_n][y]$. Entonces, $\xi_1,\dots,\xi_n,\alpha$ no son k-algebraicamente independientes porque $q(\alpha) = 0$.

P16. Sea $\xi_1,\dots,\xi_n \in K$ una base de k-trascendencia de K y $\eta_1,\dots,\eta_m$ una base de K-trascendencia de Σ. Veamos que $\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_m$ es una base de k-trascendencia de Σ.

Son k-algebraicamente independientes: Sea $p(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ un polinomio con coeficientes en k tal que $p(\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_m)=0$. Escribamos, con las notaciones evidentes, $p(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=p(x,y)=\sum_\gamma p_\gamma(x)\cdot y^\gamma$ (donde los $p_\gamma(x)\in k[x]$) Entonces, $p(\xi,y)=\sum_\gamma p_\gamma(\xi)\cdot y^\gamma \in K[y]$, cumple que $p(\xi,\eta)=0$, luego $p_\gamma(\xi)=0$, para todo γ, porque las η son K-algebraicamente independientes, entonces $p_\gamma(x)=0$, porque las ξ son k-algebraicamente independientes. Luego, $p(x,y)=0$ y $\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_m$ son algebraicamente independientes.

El morfismo $k(\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_m)\hookrightarrow\Sigma$ es algebraico, porque es composición de los morfismos algebraicos $k(\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_m)\hookrightarrow K(\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_m)\hookrightarrow\Sigma$.

En conclusión,

$$\operatorname{gr}\operatorname{tr}_k\Sigma = n+m = \operatorname{gr}\operatorname{tr}_k K + \operatorname{gr}\operatorname{tr}_K\Sigma.$$

P17. Sea $\xi_1,\dots,\xi_n\in\Sigma$ k-algebraicamente independientes. Sea $\xi_1,\dots,\xi_m\in\Sigma$ una base de $k(\xi_1,\dots,\xi_n)$-trasecendencia de Σ. En el problema anterior hemos probado que $\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_m$ es una base de k-trascendencia de Σ.

Solución de los problemas del capítulo segundo

P1.

P2. a) Procedamos por reducción al absurdo. Desechando los ideales primos $\mathfrak{p}_{x_i}$ que convenga, podemos suponer que $I\not\subset \mathfrak{p}_{x_1}\cup\cdots\cup\widehat{\mathfrak{p}_{x_i}}\cup\cdots\cup\mathfrak{p}_{x_n}$, para todo i y que $\mathfrak{p}_{x_i}\not\subset\mathfrak{p}_{x_i}$ para todo $i\neq j$. Sea $f_i\in I$ tal que $f_i(x_j)\neq 0$ (y $f_i(x_i)=0$). Entonces, $g_i=\prod_{j\neq i} f_j$ cumple que $g_i(x_j)\neq 0$ si y solo si $i=j$. Por tanto, $f=\sum_i g_i$ no se anula en ningún x_i y $f\in I$, lo que es contradictorio.

b) En efecto,

$$\begin{aligned}\operatorname{Spec} A_S &= \{x\in\operatorname{Spec} A\colon \mathfrak{p}_x\cap S=\emptyset\} = \{x\in\operatorname{Spec} A\colon \mathfrak{p}_x\subseteq\cup_i\mathfrak{p}_{x_i}\}\\ &\overset{1}{=}\{x\in\operatorname{Spec} A\colon \mathfrak{p}_x\subseteq\mathfrak{p}_{x_i},\text{ para algún } i\} = \cup_i\operatorname{Spec} A_{x_i}.\end{aligned}$$

Bibliografía

1. M.F. Atiyah, I.G. Macdonald. Introduction to Commutative Algebra,Addison-Wesley Series in Mathematics, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1969.

2. D. Eisenbud, Commutative Algebra, with a View Toward Algebraic Geometry,GTM Springer, 1995.

3. R. Hartshorne, Algebraic Geometry. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1977.

4. S. Lang, Álgebra, Aguilar S.A. de ediciones, Madrid, 1971.

5. H. Matsumura. Commutative ring theory,Cambridge University Press, 1986.

6. J.S. Milne. Algebraic Geometry.http://www.jmilne.org/math/

7. J.A. Navarro. Álgebra Conmutativa Básica, Manuales UNEX, 19. Servicio de Publicaciones, Universidad de Extremadura, 1996. Versión on-line actualizada disponible en http://matematicas.unex.es/ navarro.

8. M. Reid. Undergraduate Commutative Algebra, London Mathematical Society, Students Texts 29, University Cambridge Press, 1995.

9. C. Sancho, P. Sancho. Álgebra Conmutatica. Geometría Algebraica. Manuales Uex online, 90. Servicio de Publicaciones, Universidad de Extremadura, 2013.

Índice alfabético

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

UNIÓN EUROPEA
FONDO EUROPEO DE
DESARROLLO REGIONAL:
UNA MANERA DE HACER EUROPA

FEDER

GOBIERNO DE EXTREMADURA
Consejería de Empleo, Empresa e Innovación

91